Mini-curso de Introdução à Teoria de Categorias com aplicações à Lógica

Marcelo E. Coniglio

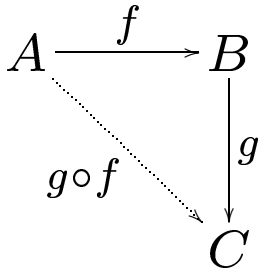
Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência
Universidade Estadual de Campinas
C.P. 6133, CEP 13081-970
Campinas (SP), Brazil
coniglio@cle.unicamp.br

Programa:

Definição de categoria. Monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos. Operações básicas em categorias: produtos e co-produtos, pullbacks e pushouts, equalisadores e co-equalisadores, objeto terminal e objeto inicial, limites e co-limites. Exponenciação. Subobjetos. Classificador de subobjetos. Topos: definições básicas e exemplos. Fatoração epi-mono. Álgebra de subobjetos. Funtores e transformações naturais. Adjunção. Funtor Hom. Lema de Yoneda. Aplicações de topos à lógica: semântica para linguagens de primeira ordem e teoría local de conjuntos.

Definição de categoria

Uma categoria $\mathcal{C}$ é definida a partir do seguinte:
(1) Uma coleção $|\mathcal{C}|$ de *objetos*.
(2) Para cada par de objetos $\langle A, B\rangle$, uma coleção $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ de *morfismos* (em $\mathcal{C}$) de A em B.
Se $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ escreveremos $f : A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$.
Se $f : A \to B$ então definimos $Dom(f) := A$ e $Cod(f) := B$, e dizemos que A é o domínio de f e B é o co-domínio de f.
(3) Uma operação parcial de composição entre morfismos: se $A \xrightarrow{f} B$ e $B \xrightarrow{g} C$ então existe um morfismo $g \circ f : A \to C$.

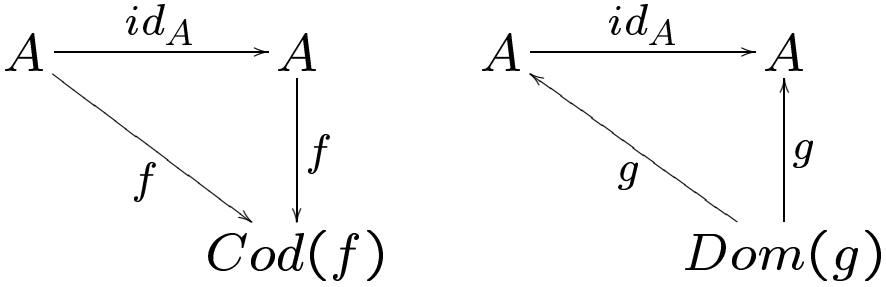


A composição é associativa, isto é:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

se as compostas existem.

(4) Para cada objeto A, um morfismo $id_A : A \to A$ (a *identidade de* A) tal que $f \circ id_A = f$ e $id_A \circ g = g$ se f e g são morfismos tais que $Dom(f) = A$ e $Cod(g) = A$. Isto é, os diagramas abaixo comutam.



Exemplos:

1) A categoria **Set** dos conjuntos. Os objetos são conjuntos e os morfismos são funções. A composição é a usual. Dado um conjunto A, o morfismo $id_A : A \to A$ é a função identidade: $id_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

2) A categoria **Top** dos espaços topológicos. Os objetos são espaços topológicos $\langle X, \mathbf{\Omega}(X) \rangle$ e os morfismos são funções contınuas. A composição é a usual. Para cada $A = \langle X, \mathbf{\Omega}(X) \rangle$, o morfismo $id_A : A \to A$ é a função identidade em X: $id_A(x) = x$ para todo $x \in X$.

3) A categoria **Grp** dos grupos. Os objetos são grupos $\langle G, \cdot, e, (_)^{-1} \rangle$ e os morfismos são homomorfismos de grupos. A composição é a usual. Dado um grupo $A = \langle G, \cdot, e, (_)^{-1} \rangle$, o morfismo $id_A : A \to A$ é a função identidade em G: $id_A(x) = x$ para todo $x \in G$.
4) A categoria **Mon** dos monoides. Os morfismos são homomorfismos de monoides.
5) A categoria $\mathbf{Vec}_K$ dos espaços vetoriais sobre o corpo K (fixo). Os morfismos são transformações lineares.
6) A categoria **Man** das variedades diferenciaveis. Os morfismos são funções diferenciaveis.
7) Seja $\mathbf{P} = \langle P, \leq \rangle$ uma estrutura de preordem. A categoria $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ obtida de $\mathbf{P}$ é tal que $|\mathcal{C}_{\mathbf{P}}| = P$ e, para todo $x, y \in P$,

$$Hom_{\mathcal{C}_{\mathbf{P}}}(x, y) = \begin{cases} \{m_y^x\} & \text{se } x \leq y \\ \\ \emptyset & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Aqui, m_y^x é um simbolo tal que $m_y^x \neq m_v^u$ se $(x, y) \neq (u, v)$. Definimos $m_z^y \circ m_y^x := m_z^x$.

8) Seja $\mathbf{M} = \langle M, \cdot, e \rangle$ um monoide. A categoria $\mathcal{C}_{\mathbf{M}}$ obtida de **M** é tal que $|\mathcal{C}_{\mathbf{M}}| = \{*\}$, $Hom_{\mathcal{C}_{\mathbf{M}}}(*,*) = M$, $x \circ y = x \cdot y$ para todo $x, y \in M$, e $id_* = e$.
9) Categorias produto: dadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ considere a categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ tal que $|\mathcal{C} \times \mathcal{D}| = |\mathcal{C}| \times |\mathcal{D}|$. Dado dois objetos $\langle A, B \rangle$ e $\langle A', B' \rangle$ em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ então um morfismo $m : \langle A, B \rangle \to \langle A', B' \rangle$ em $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um par $m = \langle f, g \rangle$ tal que $f : A \to A'$ em $\mathcal{C}$ e $g : B \to B'$ em $\mathcal{D}$. A composição e os morfismos identidade são calculados ponto a ponto.
10) Categorias flecha: dada uma categoria $\mathcal{C}$, construimos a *categoria flecha* $\mathcal{C}^{\to}$ tal que os objetos de $\mathcal{C}^{\to}$ são morfismos $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$. Dados dois objetos f, g de $\mathcal{C}^{\to}$ então um morfismo $m : f \to g$ em $\mathcal{C}^{\to}$ é um par $m = \langle h, k \rangle$ de morfismos de $\mathcal{C}$ (ou um morfismo de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$) tais que $h : Dom(f) \to Dom(g)$, $k : Cod(f) \to Cod(g)$, e o diagrama abaixo comuta em $\mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc} Dom(f) & \xrightarrow{h} & Dom(g) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Cod(f) & \xrightarrow[k]{} & Cod(g) \end{array}$$

A composição e os morfismos identidade são calculados ponto a ponto, isto é:
$\langle h', k' \rangle \circ \langle h, k \rangle = \langle h' \circ h, k' \circ k \rangle$

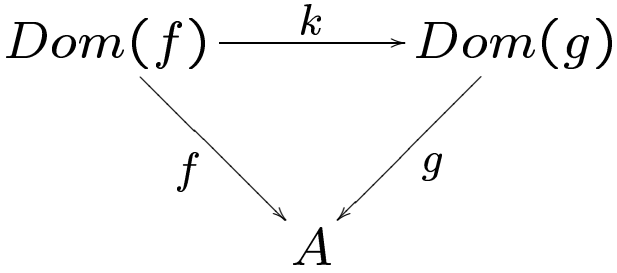
$$\begin{array}{ccccc} Dom(f) & \xrightarrow{h} & Dom(g) & \xrightarrow{h'} & Dom(i) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle i} \\ Cod(f) & \xrightarrow[k]{} & Cod(g) & \xrightarrow[k']{} & Cod(i) \end{array}$$

$id_f = \langle id_A, id_B \rangle$ se $f : A \to B$

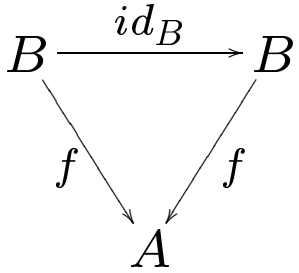
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{id_A} & A \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ B & \xrightarrow[id_B]{} & B \end{array}$$

11) Categorias *comma* ou *slice*: dada uma categoria $\mathcal{C}$ e um objeto A de $\mathcal{C}$ considere a categoria *comma* $\mathcal{C}{\downarrow}A$ cujos objetos são os morfismos de $\mathcal{C}$ com co-domínio A. Isto é, $|\mathcal{C}{\downarrow}A| = \bigcup_{X \in |\mathcal{C}|} Hom_{\mathcal{C}}(X, A)$.

Um morfismo $\bar{k} : f \to g$ em $\mathcal{C}\downarrow A$ é dado por um morfismo $Dom(f) \xrightarrow{k} Dom(g)$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama abaixo comuta em $\mathcal{C}$.



A identidade $id_f : f \to f$ de um objeto $B \xrightarrow{f} A$ de $\mathcal{C}\downarrow A$ é dada pelo morfismo $id_B : B \to B$ em $\mathcal{C}$, isto é: $id_f = \overline{id_B}$



12) Caso particular interessante: a categoria **Sig** das *assinaturas proposicionais* é dada por **Set**$\downarrow\mathbb{N}$. Assim, podemos identificar um objeto $f : X \to \mathbb{N}$ com uma assinatura proposicional $C = \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $C_n = f^{-1}(\{n\})$ é o conjunto dos conectivos n-arios. Um morfismo de assinaturas $h : C \to C'$ é portanto uma família de funções $h = \{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $h_n : C_n \to C'_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Monomorfismos

A generalização da noção de "função injetiva" é a noção de monomorfismo. Note que uma função $f : A \to B$ é injetiva sse, para todo par de funções $g, h : X \to A$ tais que $f(g(x)) = f(h(x))$ para todo $x \in X$, então $g(x) = h(x)$ para todo $x \in X$, isto é, $g = h$. De fato, a parte "somente se" é trivial. Reciprocamente, suponha que f satisfaz a condição acima e sejam $x, y \in A$ tais que $f(x) = f(y)$. Considere as funções $g, h : \{*\} \to A$ tais que $g(*) = x$ e $h(*) = y$. Dado que $f \circ g = f \circ h$ então, por hipótese, $g = h$, isto é, $x = y$.

Generalizando para uma categoria $\mathcal{C}$, dizemos que um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é um *monomorfismo* se, para todo par de morfismos $g, h : X \to A$ tal que $f \circ g = f \circ h$, então $g = h$.

$$X \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f} B \quad \text{comutativo}$$

implica $g = h$

Exemplos

1) Em **Top**, **Grp**, **Mon**, $\mathbf{Vec}_K$ e **Man**, os monomorfismos são aqueles morfismos que são injetivos como funções.
2) Na categoria $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ definida a partir de uma pre-ordem **P**, todas as flechas são monomorfismos: dadas $g, h : x \to y$ em $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ então $g = m_y^x = h$.
3) Numa categoria *comma* $\mathcal{C}{\downarrow}A$, um morfismo $\bar{k} : f \to g$ é monomorfismo em $\mathcal{C}{\downarrow}A$ sse o morfismo $Dom(f) \stackrel{k}{\to} Dom(g)$ é monomorfismo em $\mathcal{C}$.
4) Em particular, em $\mathbf{Sig} = \mathbf{Set}{\downarrow}\mathbb{N}$, um morfismo $h : C \to C'$ é monomorfismo sse cada função $h_n : C_n \to {C'}_n$ é injetiva.

Epimorfismos

A generalização da noção de "função sobrejetiva" é a noção de epimorfismo. Note que uma função $f : A \to B$ é sobrejetiva sse, para todo par de funções $g, h : B \to X$ tais que $g(f(a)) = h(f(a))$ para todo $a \in A$, então $g(b) = h(b)$ para todo $b \in B$, isto é, $g = h$.
De fato, a parte "somente se" é trivial. Reciprocamente, suponha que f satisfaz a condição acima. Considere as funções $g, h : B \to \{0, 1\}$ tais que $g(b) = 1$ sse existe $a \in A$ tal que $b = f(a)$, e $h(b) = 1$ para todo $b \in B$. Dado que $g(f(a)) = h(f(a))$ para todo $a \in A$ então, por hipótese, $g = h$, isto é, f é sobrejetiva.

Generalizando para uma categoria $\mathcal{C}$, dizemos que um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é um *epimorfismo* se, para todo par de morfismos $g, h : B \to X$ tal que $g \circ f = h \circ f$, então $g = h$.

$$A \xrightarrow{f} B \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \quad \text{comutativo}$$

implica $g = h$

Exemplos

1) Em **Grp**, os epimorfismos são aqueles morfismos que são sobrejetivos como funções.
2) Na categoria **Mon**, existem epimorfismos que não são funções sobrejetoras. Considere o morfismo de inclusão $i : \langle \mathbb{N}, +, 0\rangle \to \langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$ dado por $i(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considere um diagrama comutativo

$$\langle \mathbb{N}, +, 0\rangle \xrightarrow{\ i\ } \langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \langle M, \cdot, e\rangle$$

isto é: $f(n) = g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema: Se $\langle M, \cdot, e\rangle$ é um monoide e $x, y, a \in M$ são tais que $x \cdot a = e = a \cdot y$ então $x = y$.
Com efeito:

$$x = x \cdot e = x \cdot a \cdot y = e \cdot y = y.$$

Usando o Lema provamos que $f(-n) = g(-n)$:
$f(-n) \cdot f(n) = f((-n) + n) = f(0) = e$;

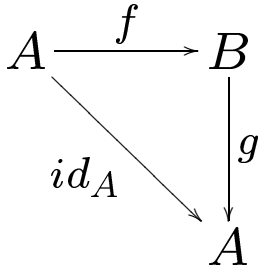
$$\begin{aligned} f(n) \cdot g(-n) &= g(n) \cdot g(-n) \\ &= g(n + (-n)) = g(0) = e. \end{aligned}$$

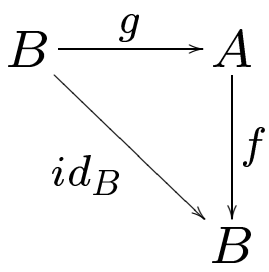
Pelo Lema, temos que $f(-n) = g(-n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $f = g$. Portanto, i é epimorfismo, mas i não é uma função sobrejetiva.
3) Na categoria $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ definida a partir de uma pre-ordem $\mathbf{P}$, todas as flechas são epimorfismos: dadas $g, h : x \to y$ em $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ então
$g = m_y^x = h$.

Isomorfismos

A generalização da noção de "função bijetiva" é a noção de isomorfismo. Note que uma função $f : A \to B$ é bijetiva sse existe uma função $g : B \to A$ tal que $g(f(a)) = a$ e $f(g(b)) = b$ para todo $a \in A$ e para todo $b \in B$. A função g é a *inversa* de f, denotada por f^{-1}.

Generalizando para uma categoria $\mathcal{C}$, dizemos que um morfismo $f : A \to B$ em $\mathcal{C}$ é um *isomorfismo* se existe um morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ e $f \circ g = id_B$.





Note que o morfismo g, se existir, é único, e é representado por f^{-1}. Se A e B são isomorfos escreveremos $A \simeq B$.

Exemplos

1) Em **Grp**, os isomorfismos são aqueles morfismos que são bijetivos como funções, e cuja função inversa é também um morfismo.
2) Numa categoria $\mathcal{C}$, um isomorfismo f é monomorfismo e epimorfismo: $h \circ f = g \circ f$ implica que

$$h = h \circ id = h \circ f \circ f^{-1} = g \circ f \circ f^{-1} = g \circ id = g.$$

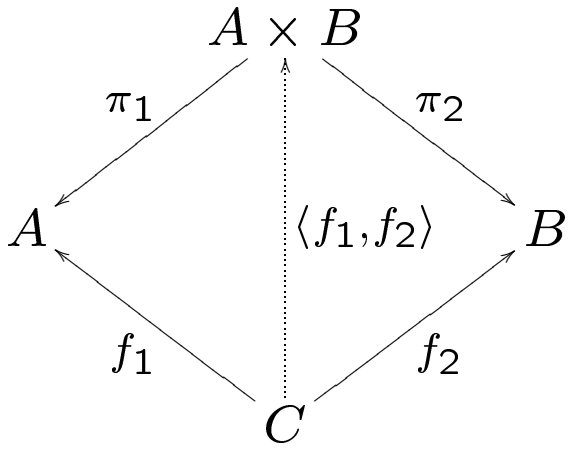
Analogamente, $f \circ h = f \circ g$ implica que $h = g$.
3) Em **Set**, os isomorfismos são exatamente os morfismos que são simultaneamente monomorfismos e epimorfismos.
4) Na categoria **Mon**, existem morfismos que são simultaneamente epimorfismos e monomorfismos, mas que não são isomorfismos. Considere novamente o morfismo de inclusão $i : \langle \mathbb{N}, +, 0 \rangle \to \langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ dado por $i(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
5) Numa categoria $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ definida a partir de uma pre-ordem **P**, todas as flechas são monomorfismos e epimorfismos, mas os únicos isomorfismos são da forma $m_y^x : x \to y$ tal que $x \leq y$ e $y \leq x$. Em particular, se **P** é uma ordem parcial, então os únicos isomorfismos são os morfismos identidade.

Produtos (finitos)

Dados dos conjuntos A, B, seu produto cartesiano $A \times B$ pode ser caracterizado usando as projeções canônicas:
$\pi_1 : A \times B \to A$ e $\pi_2 : A \times B \to B$ são funções tais que, se C é um conjunto e $f_1 : C \to A$ e $f_2 : C \to B$ são duas funções, então existe uma única função $g : C \to A \times B$ tal que
$\pi_1(g(x)) = f_1(x)$, e $\pi_2(g(x)) = f_2(x)$
para todo $x \in C$.
A função g é dada por $g(x) = \langle f_1(x), f_2(x) \rangle$ para todo $x \in C$.

Generalizando para uma categoria $\mathcal{C}$, seja $\langle A, B \rangle$ um par de objetos de $\mathcal{C}$. O *produto cartesiano* do par $\langle A, B \rangle$ é um par $\langle A \times B, \{\pi_1, \pi_2\} \rangle$ tal que $A \times B$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $\pi_1 : A \times B \to A$, $\pi_2 : A \times B \to B$ são morfismos em $\mathcal{C}$.

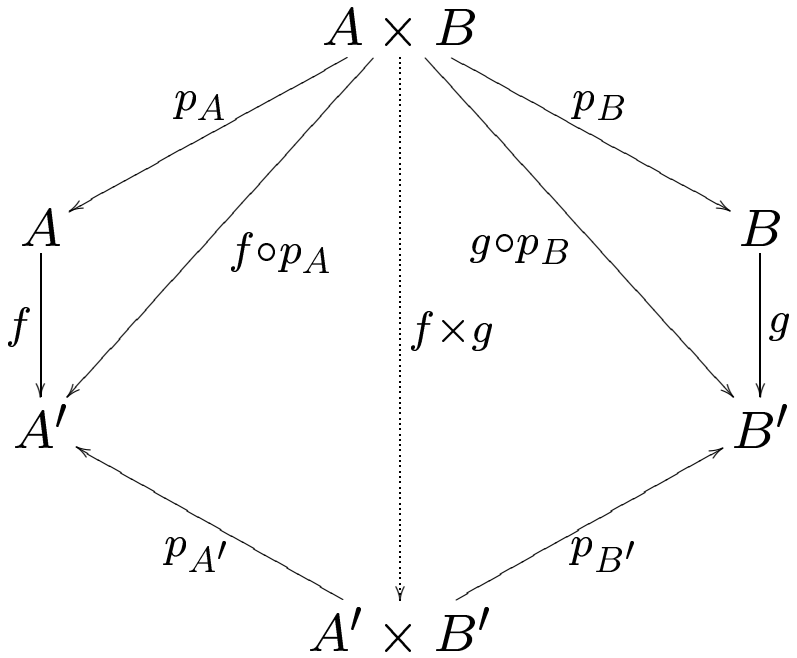
O par $\langle A \times B, \{\pi_1, \pi_2\}\rangle$ tem a seguinte *propriedade universal*: se $\langle C, \{f_1, f_2\}\rangle$ é um par formado por um objeto de $\mathcal{C}$ e dois morfismos tais que $f_1 : C \to A$ e $f_2 : C \to B$ então existe um único morfismo $\langle f_1, f_2\rangle : C \to A \times B$ tal que o diagrama abaixo comuta.



$\pi_1 \circ \langle f_1, f_2\rangle = f_1$
$\pi_2 \circ \langle f_1, f_2\rangle = f_2$

O produto é unico a menos de isomorfismos.
Note que $A \times B$ é isomorfo a $B \times A$.
As projeções π_1 e π_2 são epimorfismos.

Se $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ então o morfismo $f \times g : A \times B \to A' \times B'$ é obtido da propriedade universal de $A' \times B'$ como sendo o único morfismo que comuta o diagrama abaixo.



$$f \times g = \langle f \circ p_A, g \circ p_B \rangle$$

Dualidade

Dada uma categoria $\mathcal{C}$, definimos a categoria *dual* $\mathcal{C}^{op}$ tal que:
$|\mathcal{C}^{op}| = |\mathcal{C}|$;
$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$;
a composição e os morfismos identidade são obtidos de $\mathcal{C}$.

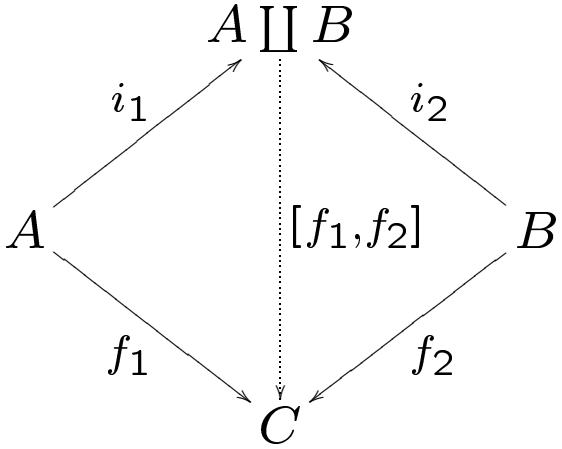
A categoria $\mathcal{C}^{op}$ é $\mathcal{C}$ "com as flechas invertidas".

As definições e construções categoriais podem ser dualizadas.

Assim, o dual do conceito de monomorfismo é o conceito de epimorfismo.

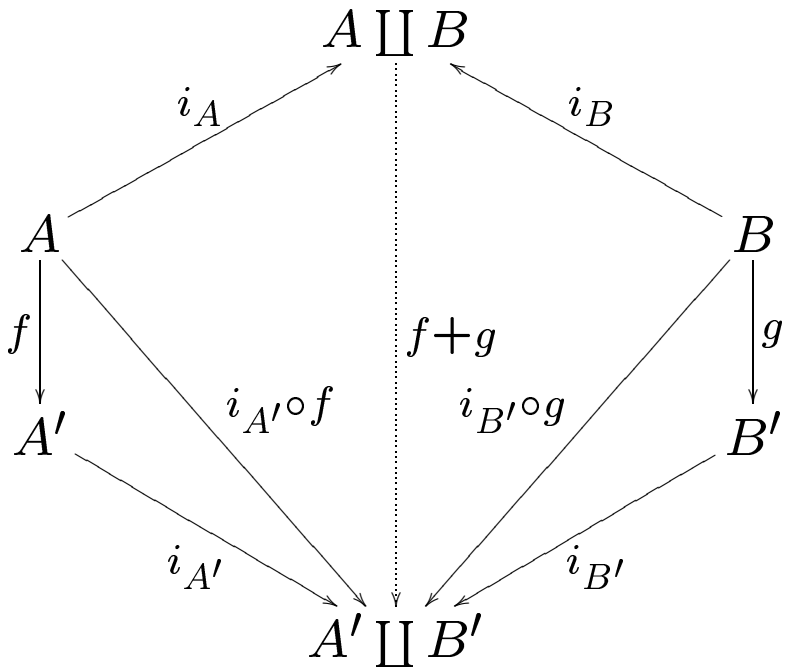
Co-produtos

São definidos por dualização do conceito e produto cartesiano. Generalizam a noção de "união disjunta" de conjuntos.
Seja $\langle A, B\rangle$ um par de objetos de $\mathcal{C}$. O *co-produto* do par $\langle A, B\rangle$ é um par $\langle A \coprod B, \{i_1, i_2\}\rangle$ tal que $A \coprod B$ é um objeto de $\mathcal{C}$ e $i_1 : A \to A \coprod B$, $i_2 : B \to A \coprod B$ são morfismos em $\mathcal{C}$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: se $\langle C, \{f_1, f_2\}\rangle$ é um par formado por um objeto de $\mathcal{C}$ e dois morfismos tais que $f_1 : A \to C$ e $f_2 : B \to C$ então existe um único morfismo $[f_1, f_2] : A \coprod B \to C$ tal que o diagrama abaixo comuta.



$[f_1, f_2] \circ i_1 = f_1$
$[f_1, f_2] \circ i_2 = f_2$
O co-produto é unico a menos de isomorfismos; $A \coprod B \simeq B \coprod A$ e i_1, i_2 são mônicos.

Se $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ então o morfismo $f + g : A \coprod B \to A' \coprod B'$ é obtido da propriedade universal de $A \coprod B$ como sendo o único morfismo que comuta o diagrama abaixo.



$$f + g = [i_{A'} \circ f, i_{B'} \circ g]$$

Equalisadores

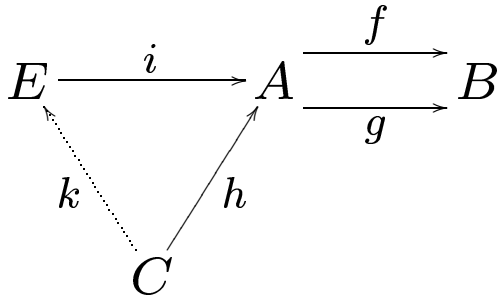
Dado um par de funções $f, g : A \to B$ podemos definir "o maior lugar em que f e g coincidem", isto é,

$$E = \{x \ : \ x \in A \ \text{ e } \ f(x) = g(x)\}.$$

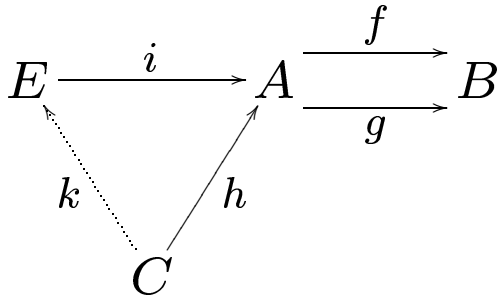
Considerando a inclusão $i : E \to A$ temos que

$$E \xrightarrow{\ i\ } A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

comuta, ou seja $f \circ i = g \circ i$. Por outro lado, se $C \overset{h}{\to} A$ é tal que $f \circ h = g \circ h$ então existe um único morfismo $k : C \to E$ tal que o diagrama abaixo comuta.



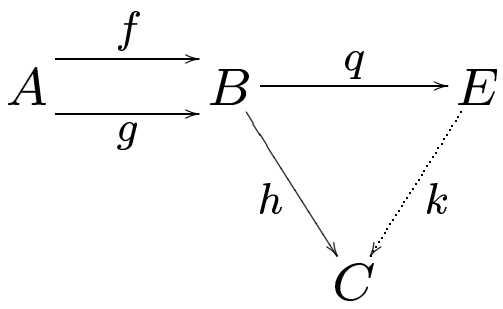
Generalizando, dados morfismos $f, g : A \to B$ numa categoria $\mathcal{C}$, o *equalisador* de f e g é um par $\langle E, i \rangle$ tal que $i : E \to A$ satisfaz $f \circ i = g \circ i$. Mais ainda, se $\langle C, h \rangle$ é tal que $h : C \to A$ satisfaz $f \circ h = g \circ h$ então existe um único morfismo $k : C \to E$ tal que o diagrama abaixo comuta.



O morfismo i sempre é monomorfismo.
Se adicionalmente i é epimorfismo então i resulta ser um isomorfismo.
Exercício: Prove isto.

Co-equalisadores

O dual do conceito de equalisador é o conceito de co-equalisador. Assim, dados morfismos $f, g : A \to B$ o seu *co-equalisador* é um morfismo $q : B \to E$ tal que $q \circ f = q \circ g$ e, para todo morfismo $h : B \to C$ tal que $h \circ f = h \circ g$, existe um único morfismo $k : E \to C$ tal que o diagrama abaixo comuta.



O morfismo q sempre é epimorfismo.
Se adicionalmente q é monomorfismo então q resulta ser um isomorfismo.

Em **Set**, os co-equalisadores vêm da noção de relação de equivalência.

Com efeito, dadas duas funções $f, g : A \to B$ considere o conjunto

$$S = \{\langle f(x), g(x)\rangle \ : \ x \in A\}.$$

Seja $R \subseteq B \times B$ a relação de equivalência gerada por S, isto é, R é a menor relação de equivalência em B que contém S. Ou seja, R é a menor relação de equivalência em B que identifica $f(x)$ com $g(x)$ para todo $x \in A$.

Seja B/R o quociente de B pela relação R.

Então o co-equalisador de f e g é a projeção canônica $p : B \to B/R$ dada por $x \mapsto [x]$.

Objeto inicial

O conjunto vazio $\emptyset$ pode ser caracterizado em **Set** da maneira seguinte: para cada conjunto A, existe uma única função $\emptyset \xrightarrow{f} A$, a função $f = \emptyset$ (o conjunto vazio de pares ordenados).

Generalizando, dizemos que um objeto $\mathbf{0}$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é *inicial* se, para todo objeto A de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $\mathbf{0} \xrightarrow{!} A$ em $\mathcal{C}$. O objeto inicial é único a menos de isomorfismos.

Exemplos

1) $\emptyset$ é o (único) objeto inicial em **Set**.

2) Em $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ os objetos iniciais são os elementos minimais da preordem **P**. Se **P** é uma ordem parcial então o objeto inicial é o elemento mínimo (se existir).

3) Em **Grp** e **Mon** um objeto inicial é um monoide de um só elemento $M = \{e\}$ com $e \cdot e = e$ e $e^{-1} = e$. Portanto existem infinitos objetos iniciais.

4) Em $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ a função $\emptyset : \emptyset \rightarrow \emptyset$ é o único objeto inicial.

Objeto terminal

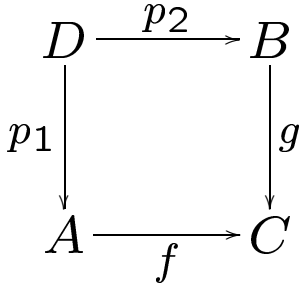
O conceito dual de objeto inicial é o conceito de objeto terminal.

Dizemos que um objeto **1** de uma categoria $\mathcal{C}$ é *terminal* se, para todo objeto A de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $A \xrightarrow{!} \mathbf{1}$ em $\mathcal{C}$. O objeto terminal é único a menos de isomorfismos. Para todo objeto A, $A \simeq A \times \mathbf{1}$

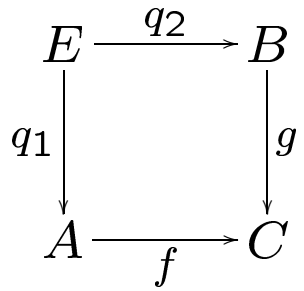
Exemplos
1) Em **Set** os conjuntos unitários $\{*\}$ são os objetos terminais, portanto há infinitos terminais.
2) Em $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ os objetos terminais são os elementos maximais da preordem **P**. Se **P** é uma ordem parcial então o objeto terminal é o elemento máximo (se existir).
3) Em **Grp** e **Mon** um objeto terminal é um monoide de um só elemento $M = \{e\}$ com $e \cdot e = e$ e $e^{-1} = e$. Portanto existem infinitos objetos terminais.
4) Em $\mathbf{Set}^{\rightarrow}$ as funções $\{*\} \xrightarrow{!} \{*'\}$ entre os conjuntos unitários $\{*\}$ e $\{*'\}$ são os objetos terminais, portanto há infinitos terminais.

Pullbacks

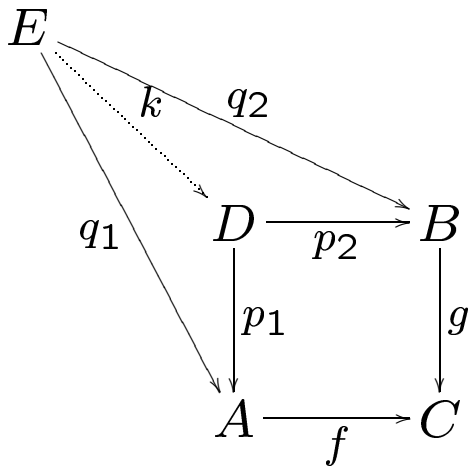
Esta é uma das construções mais importantes em categorias. Dado um par de morfismos $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ em $\mathcal{C}$, o seu *pullback* é um par $\langle D, \{p_1, p_2\}\rangle$ tal que $p_1 : D \to A$ e $p_2 : D \to B$ são morfismos em $\mathcal{C}$ de maneira que o diagrama abaixo comuta.



O pullback tem a seguinte propriedade universal: suponha que $\langle E, \{q_1, q_2\}\rangle$ é um par tal que $q_1 : E \to A$ e $q_2 : E \to B$ são morfismos em $\mathcal{C}$ de maneira que o diagrama abaixo comuta.



Então existe um único morfismo $k : E \to D$ tal que o diagrama abaixo comuta.

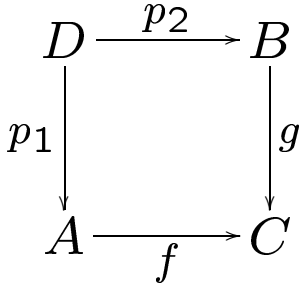


$p_1 \circ k = q_1$
$p_2 \circ k = q_2$

Note que o pullback é único, a menos de isomorfismos.
O pullback é chamado também de *produto fibrado*.
Muitas construções matemáticas são expressáveis através da noção de pullback.

Exemplos

1) Em **Set**, o pullback



é dado por

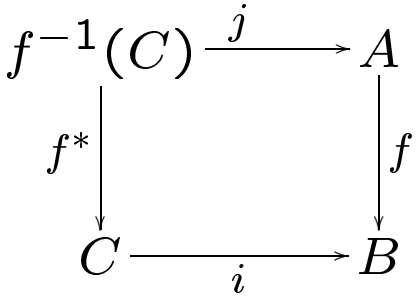
$$D = \{\langle x, y\rangle \ : \ x \in A,\ y \in B,\ \text{and}\ f(x) = g(y)\}$$

com p_1 e p_2 as projeções canônicas. Às vezes escreve-se $D = A \times_C B$.

2) Imagem inversa: dada uma função $f : A \to B$ e $C \subseteq B$ então *a imagem inversa de* C *por* f, denotada por $f^{-1}(C)$, é o conjunto

$$f^{-1}(C) = \{a \ : \ a \in A \text{ and } f(a) \in C\}.$$

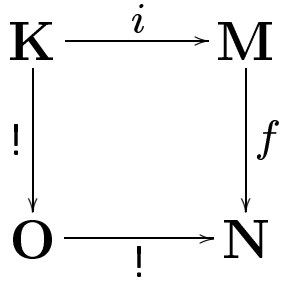
Esta construção sai do pullback



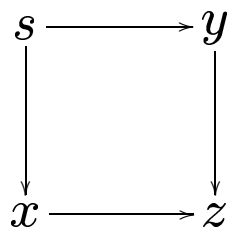
em que $j : f^{-1}(C) \to A$ é a função de inclusão de $f^{-1}(C)$ em A, $i : C \to B$ é a função de inclusão de C em B, e $f^*(x) = f(x)$ para todo $x \in f^{-1}(C)$.

Esta perspectiva permite generalizar a noção de *imagem inversa* para subobjetos e morfismos numa categoria geral, como veremos depois.

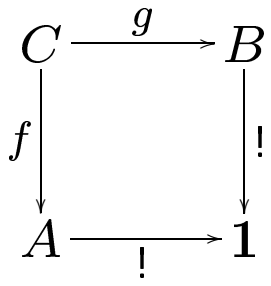
4) Kernels em monoides: seja $f : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ um homomorfismo de monoides e considere o kernel $K = \{x : f(x) = e\}$ de f. Se $\mathbf{O}$ denota o monoide unitário (objeto terminal e inicial de **Mon**) e i denota a inclusão de K em M então o diagrama abaixo é um pullback.



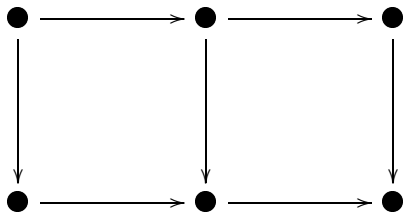
5) Em $\mathcal{C}_{\mathbf{P}}$ um diagrama



é um pullback sse s é um ínfimo de x e y.
6) Se $\mathcal{C}$ tem objeto terminal $\mathbf{1}$ então o produto cartesiano $\langle A \times B, \{\pi_1, \pi_2\}\rangle$ é obtido do pullback abaixo.



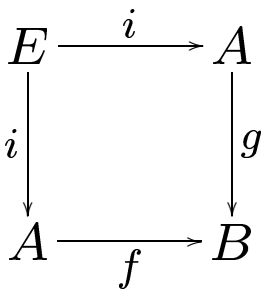
Lema do pullback Considere um diagrama comutativo da forma seguinte:



(i) Se os quadrados menores são pullbacks, então o retângulo externo é pullback.
(ii) Se o retângulo exterior e o quadrado direito são pullbacks então o quadrado esquerdo é pullback.

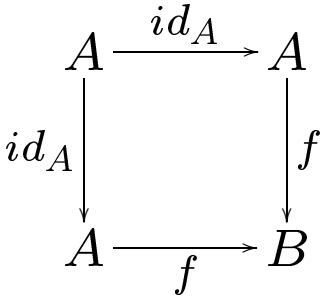
Exercícios:

1) Se o diagrama



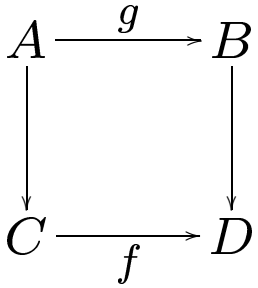
é um pullback então i é um equalisador de f e g.

2) Um morfismo $f : A \to B$ é monomorfismo sse



é um pullback.

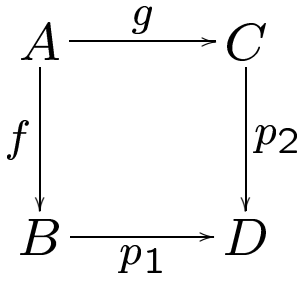
3) Se



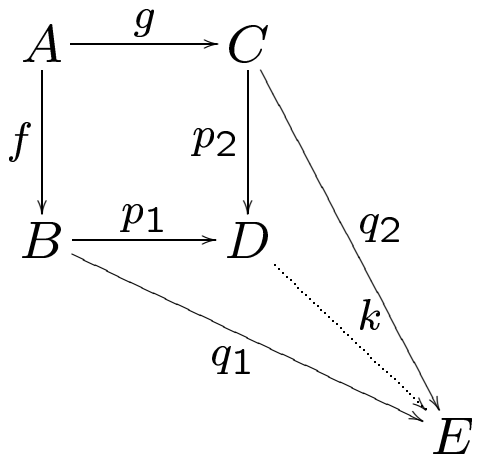
é um pullback e f é monomorfismo, então g é monomorfismo.

Pushouts

É o conceito dual de pullback. Assim, o *pushout* de um diagrama $B \overset{f}{\leftarrow} A \overset{g}{\rightarrow} C$ é um par $\langle D, \{p_1, p_2\}\rangle$ tal que $p_1 : B \rightarrow D$ e $p_2 : C \rightarrow D$, o diagrama



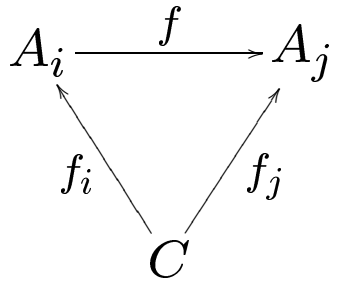
comuta e para qualquer outro par $\langle E, \{q_1, q_2\}\rangle$ com essa propriedade existe um único morfismo $k : D \rightarrow E$ tal que o diagrama abaixo comuta.



O pushout é único, a menos de isomorfismos. Podemos dualizar os resultados sobre pullbacks obtendo resultados sobre pushouts.

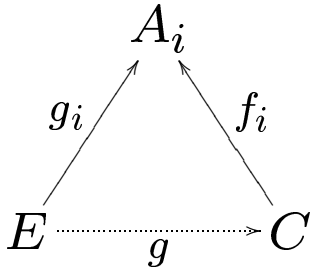
Limites

As construções anteriores podem ser generalizadas pela noção de limite (colimite) de diagramas.
Um *diagrama* numa categoria $\mathcal{C}$ é um par $\mathbf{D} = \langle \mathcal{O}, \mathcal{M} \rangle$ tal que $\mathcal{O} = \{A_i\}_{i \in I}$ é uma família de objetos de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{M} \subseteq \bigcup_{i,j \in I} Hom_{\mathcal{C}}(A_i, A_j)$ é um conjunto de morfismos entre objetos de $\mathcal{O}$. Um *cone* para $\mathbf{D}$ é um par $\langle C, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ tal que $C \xrightarrow{f_i} A_i$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que



comuta para todo $f \in \mathcal{M}$.

Um *limite* para $\mathbf{D}$ é um cone $\langle C, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ para $\mathbf{D}$ tal que, para todo outro cone $\langle E, \{g_i\}_{i \in I} \rangle$ para $\mathbf{D}$ existe um único morfismo $g : E \to C$ que comuta



para todo $i \in I$.

O limite é único a menos de isomorfismos.

Exemplos

1) O diagrama $\mathbf{D} = \langle \{A_1, A_2\}, \emptyset \rangle$ tem como limite o produto cartesiano $\langle A_1 \times A_2, \{\pi_1, \pi_2\} \rangle$.

2) O diagrama

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

tem como limite o equalisador

$$E \xrightarrow{i} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B\,.$$

3) O limite do diagrama vazio $\mathbf{D} = \langle \emptyset, \emptyset \rangle$ é o objeto terminal $\mathbf{1}$.

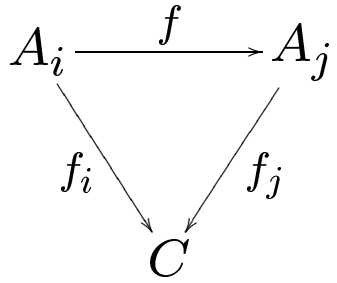
4) O limite do diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow[f]{} & C \end{array}$$

é o seu pullback.

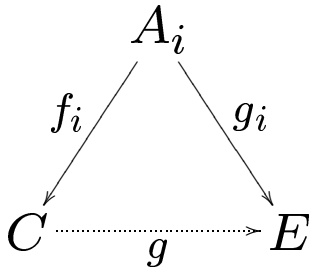
Co-limites

O conceito dual de limite é o *co-limite*.
Dado um diagrama $\mathbf{D} = \langle \{A_i\}_{i \in I}, \mathcal{M} \rangle$ em $\mathcal{C}$, um *co-cone* para $\mathbf{D}$ é um par $\langle C, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ tal que $A_i \xrightarrow{f_i} C$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ tal que



comuta para todo $f \in \mathcal{M}$.

Um *co-limite* para $\mathbf{D}$ é um co-cone $\langle C, \{f_i\}_{i \in I} \rangle$ para $\mathbf{D}$ tal que, para todo outro co-cone $\langle E, \{g_i\}_{i \in I} \rangle$ para $\mathbf{D}$ existe um único morfismo $g : C \to E$ que comuta



para todo $i \in I$.

O co-limite é único a menos de isomorfismos.
O co-limite de $\mathbf{D}$ é o limite de $\mathbf{D}^{op}$ em $\mathcal{C}^{op}$.

Exemplos

1) O diagrama $\mathbf{D} = \langle \{A_1, A_2\}, \emptyset \rangle$ tem como co-limite o co-produto $\langle A_1 \coprod A_2, \{i_1, i_2\} \rangle$.

2) O diagrama

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

tem como co-limite o co-equalisador

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{p} E\,.$$

3) O co-limite do diagrama vazio $\mathbf{D} = \langle \emptyset, \emptyset \rangle$ é o objeto inicial $\mathbf{0}$.

4) O co-limite do diagrama

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{g} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

é o seu pushout.

Completude

Uma categoria $\mathcal{C}$ é *completa* se todo diagrama possui um limite. Dualmente, $\mathcal{C}$ é *co-completa* se todo diagrama possui um co-limite. E $\mathcal{C}$ é *bi-completa* se é completa e co-completa.

Dizemos que $\mathcal{C}$ é *finitamente completa* se todo diagrama finito (isto é, contendo finitos objetos e finitos morfismos) possui um limite. Analogamente definimos categorias *finitamente co-completas* e *finitamente bi-completas*.

Teorema: Se $\mathcal{C}$ tem objeto terminal e pull-backs então $\mathcal{C}$ é finitamente completa.

Corolário: Se $\mathcal{C}$ tem objeto inicial e pushouts então $\mathcal{C}$ é finitamente co-completa.

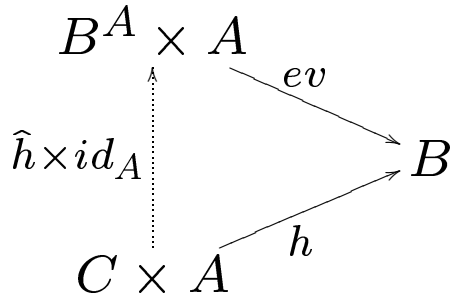
Agora definiremos uma nova operação diferente dos limites e dos co-limites:

Exponenciação

É a generalização do conceito de "espaço de funções de A em B".
Dado um par de conjuntos $\langle A, B\rangle$ então o conjunto

$$B^A = \{f \ : \ f \text{ é uma função de } A \text{ em } B\}$$

satisfaz: existe uma função $ev : B^A \times A \to B$, $ev(\langle f, a\rangle) = f(a)$ tal que, para toda função da forma $h : C \times A \to B$, existe uma única função $\widehat{h} : C \to B^A$ tal que o diagrama abaixo comuta.

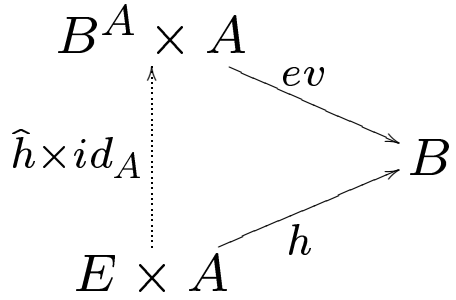


$$\widehat{h}(c)(a) = h(c, a)$$

Exercício: Provar que a exponenciação em **Set** satisfaz a propriedade universal acima.

Esta descrição da exponenciação usando a "linguagem das flechas" pode ser abstraida para uma categoria $\mathcal{C}$ com produtos finitos.

Dado um par de objetos $\langle A, B\rangle$ numa categoria $\mathcal{C}$ com produtos finitos, a *exponencial* B *elevado a* A é um par $\langle B^A, ev\rangle$ tal que $B^A \in |\mathcal{C}|$ e $ev : B^A \times A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{C}$ com a seguinte propriedade universal: dado um outro par $\langle E, h\rangle$ (isto é, dado um objeto E de $\mathcal{C}$ e um morfismo $h : E \times A \to B$), existe um único morfismo $\widehat{h} : E \to B^A$ tal que o diagrama abaixo comuta.



Logo, existe uma bijeção
$Hom_{\mathcal{C}}(C \times A, B) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(C, B^A)$.
De fato: se $\widehat{g} = \widehat{h}$ então

$$g = ev \circ (\widehat{g} \times id_a) = ev \circ (\widehat{h} \times id_a) = h.$$

E dado $k : C \to B^A$ então $g = ev \circ (k \times id_a)$ satisfaz: $\widehat{g} = k$.
Nesse caso definimos $g := \check{k}$.

Exercício: Seja $\mathbf{H}$ uma álgebra de Heyting. Então a exponencial y^x é dada pela implicação

$$x \Rightarrow y = max\{z \ : \ z \wedge x \leq y\}.$$

Uma categoria finitamente completa com exponenciação é chamada de *cartesiana fechada*.

Teorema: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria cartesiana fechada com objeto inicial $\mathbf{0}$. Então:
(1) $\mathbf{0} \simeq \mathbf{0} \times A$ para todo $A \in |\mathcal{C}|$.
(2) Se existe um morfismo $A \to \mathbf{0}$ então $A \simeq \mathbf{0}$.
(3) Se $\mathbf{0} \simeq \mathbf{1}$ então $\mathcal{C}$ é *degenerada*, isto é, todos seus objetos são isomorfos.
(4) Todo morfismo $\mathbf{0} \to A$ é monomorfismo.
(5) $A^{\mathbf{1}} \simeq A$, $A^{\mathbf{0}} \simeq \mathbf{1}$, $\mathbf{1}^A \simeq \mathbf{1}$.
Demonstração: (1) $Hom_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, B^A)$ é unitário. Logo $Hom_{\mathcal{C}}(\mathbf{0} \times A, B)$ é unitário, para todo B. Portanto $\mathbf{0} \times A$ é objeto inicial.
(2) Se existe $f : A \to \mathbf{0}$ então existe $\langle f, id_A \rangle : A \to \mathbf{0} \times A$. Usando (1) vemos que $\langle f, id_A \rangle = p_A^{-1}$, onde $p_A : \mathbf{0} \times A \to A$ é a projeção.
Exercício: Provar o resto do teorema.

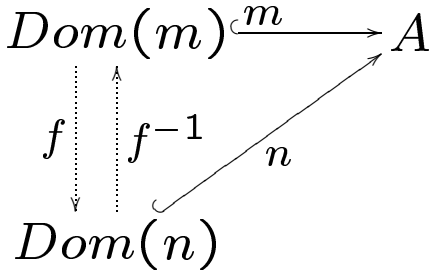
Observação: **Mon** não é degenerada, mas $\mathbf{0} \simeq \mathbf{1}$ $(= \mathbf{O})$. Logo, **Mon** não é cartesiana fechada. Dado que **Mon** é finitamente completa, então não existe a exponencial $\mathbf{M}^{\mathbf{N}}$ para todo par de monoides $\langle \mathbf{N}, \mathbf{M} \rangle$. Note que $\mathbf{M} \simeq \mathbf{O} \times \mathbf{M}$, portanto (1) não vale em geral em **Mon**. As mesmas observações podem ser feitas para **Grp**.

Ser cartesiana fechada não é suficiente para uma categoria ser "parecida" com **Set**. O poset $\mathbf{n} = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ é uma cadéia com elemento máximo, logo define uma categoria cartesiana fechada (tem pullbacks = ínfimos, e tem objeto terminal = elemento máximo; defina a exponencial!). Porém, tem morfismos que são monomorfismos e epimorfismos simultaneamente, que não são isomorfismos (diferente de **Set**).

Para ser "mais parecido" com **Set** precisamos classificador de subobjetos, chegando à noção de *topos*, que estudaremos a seguir.

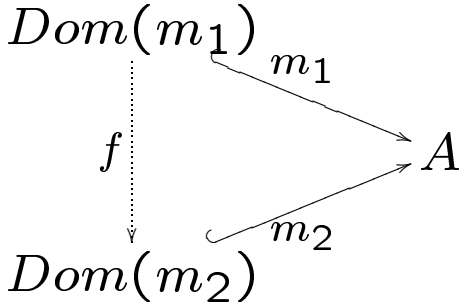
Subobjetos

Usualmente, um monomorfismo $m : A \to B$ é denotado por $m : A \hookrightarrow B$ ou $m : A \rightarrowtail B$.
Fixe um objeto A de uma categoria pequena $\mathcal{C}$ (uma categoria $\mathcal{C}$ é dita *pequena* se as coleções de objetos e morfismos são conjuntos; e $\mathcal{C}$ é *localmente pequena* se $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ é um conjunto, para todos os objetos A, B).
Definimos a seguinte relação no conjunto de monomorfismos com co-domínio A: $m \sim n$ sse existe um (necessariamente unico; porqué?) isomorfismo $f : Dom(m) \to Dom(n)$ tal que $m = n \circ f$.



Claramente $\sim$ define uma relação de equivalência.
Seja $Sub(A)$ o conjunto de classes de equivalência $[m]$ de monomorfismos $m : Dom(m) \hookrightarrow A$.
Por simplicidade, os monomorfismos são identificados com as suas clases de equivalência.

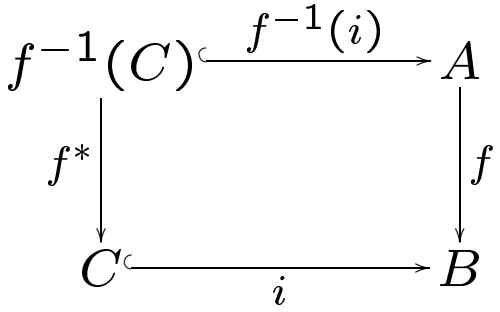
Dados $[m_i] \in Sub(A)$ $(i = 1, 2)$ dizemos que $[m_1] \leq [m_2]$ sse existe um (necessariamente unico) morfismo $f : Dom(m_1) \to Dom(m_2)$ tal que $m_1 = m_2 \circ f$.



Note que $\langle Sub(A), \leq \rangle$ é uma ordem parcial.
Obs: Em **Set** obtemos $\langle \wp(A), \subseteq \rangle$.
Provaremos depois que $\langle Sub(A), \leq \rangle$ é uma álgebra de Heyting.

Imagem inversa de um subobjeto

Dado um morfismo $A \xrightarrow{f} B$ e um subobjeto $C \overset{i}{\hookrightarrow} B$, a *imagem inversa* de i por f é o monomorfismo $f^{-1}(i) : f^{-1}(C) \hookrightarrow A$ dado pelo pullback abaixo.



Classificador de subobjetos

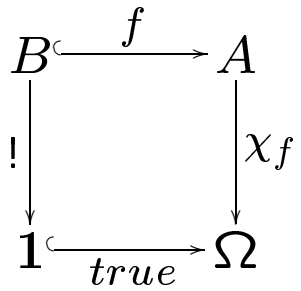
O conjunto $\wp(A)$ é denotado às vezes por 2^A. O motivo é a bijeção existente entre os subconjuntos B de A e as suas *funções características* $\chi_B : A \to 2$, onde $2 = \{0, 1\}$ e

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

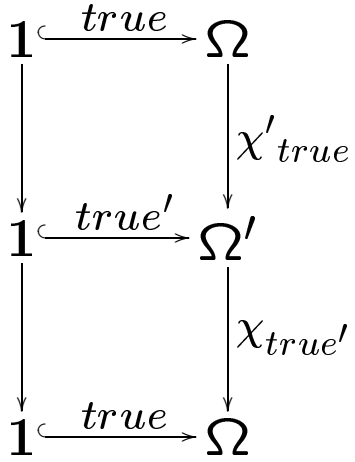
Dada $A \xrightarrow{g} 2$ seja $B_g = \{x \in A \ : \ g(x) = 1\}$; então $\chi_{B_g} = g$.
Note que $B_g = g^{-1}(\{1\})$, ou seja, o diagrama abaixo é um pullback.

$$\begin{array}{ccc} B_g & \hookrightarrow & A \\ \downarrow{\scriptstyle !} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \{1\} & \hookrightarrow & 2 \end{array}$$

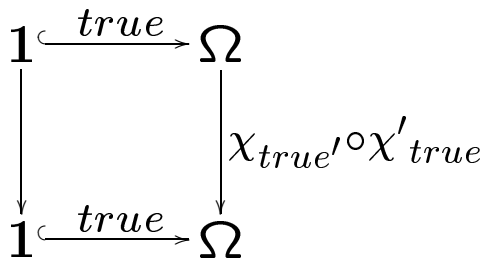
Generalizando, seja $\mathcal{C}$ uma categoria com objeto terminal $\mathbf{1}$. Um *classificador de subobjetos* para $\mathcal{C}$ é um par $\langle \Omega, true \rangle$ tal que Ω é um objeto de $\mathcal{C}$ e $true : \mathbf{1} \to \Omega$ é um morfismo de $\mathcal{C}$, satisfazendo a seguinte propriedade: para cada monomorfismo $f : B \hookrightarrow A$ existe um único morfismo $\chi_f : A \to \Omega$ tal que o diagrama abaixo é um pullback.



O classificador de subobjetos é único a menos de isomorfismos: se $true' : \mathbf{1} \to \Omega'$ é outro classificador de subobjetos temos o seguinte diagrama



em que os quadrados internos são pullbacks. pelo Lema do pullback, o retângulo externo é pullback.



Pela propriedade do clasificador de subobjetos Ω temos que $\chi_{true'} \circ \chi'_{true} = id_{\Omega}$.
Analogamente provamos que

$$\chi'_{true} \circ \chi_{true'} = id_{\Omega'}.$$

Logo:
$\Omega \simeq \Omega'$ via χ'_{true}, e $true' = \chi'_{true} \circ true$.

Dados $X \overset{f}{\hookrightarrow} A$ e $Y \overset{g}{\hookrightarrow} A$: $f \simeq g$ sse $\chi_f = \chi_g$.
Ou seja: a aplicação $[f] \mapsto \chi_f$ é injetora. Por outro lado, se $\mathcal{C}$ tem pullbacks então, dado $h : A \to \Omega$, considere o pullback abaixo.

$$\begin{array}{ccc} Dom(f) & \overset{f}{\hookrightarrow} & A \\ \downarrow & & \downarrow h \\ \mathbf{1} & \overset{true}{\hookrightarrow} & \Omega \end{array}$$

Então f é monomorfismo tal que $\chi_f = h$.
Logo:
Se $\mathcal{C}$ tem classificador de subobjetos e pullbacks então $Sub(A) \simeq Hom_{\mathcal{C}}(A, \Omega)$.

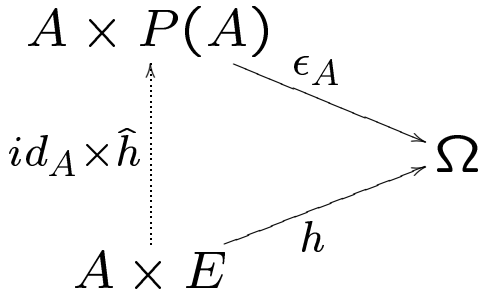
Podemos agora definir o importante conceito de *topos*.

Definição: Um *topos elementar* (ou simplesmente, um *topos*) é uma categoria $\mathcal{C}$ tal que:
(1) $\mathcal{C}$ é finitamente completa;
(2) é finitamente co-completa;
(3) $\mathcal{C}$ tem classificador de subobjetos;
(4) $\mathcal{C}$ tem exponenciação.

Observações:
i) Condições (1), (3) e (4) implicam (2). Por outro lado, (1) e (4) equivalem a $\mathcal{C}$ ser cartesiana fechada. Portanto $\mathcal{C}$ é um topos sse $\mathcal{C}$ é cartesiana fechada e tem classificador de subobjetos.
ii) Condição (1) equivale a $\mathcal{C}$ ter objeto terminal e pullbacks, portanto $\mathcal{C}$ é um topos sse:

(a) $\mathcal{C}$ tem objeto terminal;
(b) $\mathcal{C}$ tem pullbacks;
(c) $\mathcal{C}$ tem classificador de subobjetos;
(d) $\mathcal{C}$ tem exponenciação.

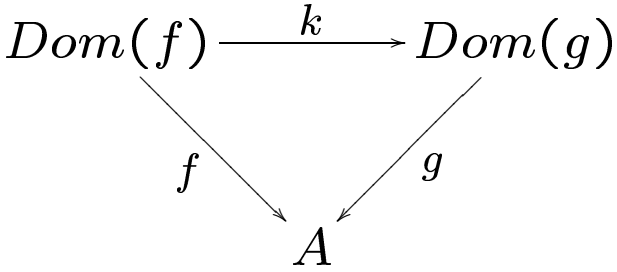
iii) Podemos ainda substituir (d) por:
(d') Para cada objeto A de $\mathcal{C}$ existe um objeto $P(A)$ de $\mathcal{C}$ e um morfismo $\epsilon_A : A \times P(A) \to \Omega$ tal que, para todo morfismo $h : A \times E \to \Omega$, existe um único morfismo $\widehat{h} : E \to P(A)$ tal que o diagrama abaixo comuta.



De fato, com (a), (b), (c), (d)' podemos definir a exponencial B^A, e então
$P(A) = \Omega^A$.
iv) Num topos, um morfismo f é um isomorfismo sse f é monomorfismo e epimorfismo.

Exemplos:
(1) **Set** é um topos.
(2) Se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são topos, então $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ é um topos.
(3) **Teorema Fundamental dos topos:** Se $\mathcal{C}$ é um topos e $A \in |\mathcal{C}|$, então $\mathcal{C}{\downarrow}A$ é um topos.

(4) **Fibrados (ou Bundles):** Um caso particular do teorema fundamental é a categoria dos fibrados $\mathbf{Bn}(I) = \mathbf{Set}{\downarrow}I$, para um conjunto fixo I. Os objetos são funções $f : A{\to}I$ e um morfismo $\bar{k} : f{\to}g$ é uma função $Dom(f){\overset{k}{\to}}Dom(g)$ tal que o diagrama abaixo comuta.



Observe que, dado $f : A{\to}I$ então $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ tal que $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$, com $A_i = f^{-1}(\{i\})$, e um morfismo $\bar{k} : f{\to}g$ é uma família $\{k_i\}_{i\in I}$ tal que $k_i : f^{-1}(\{i\}){\to}g^{-1}(\{i\})$. Podemos considerar os objetos de $\mathbf{Bn}(I)$ como famílias de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ disjuntos dois a dois. Um morfismo $\bar{k} : \{A_i\}_{i\in I}{\to}\{B_i\}_{i\in I}$ é uma família $\bar{k} = \{k_i\}_{i\in I}$ tal que $k_i : A_i{\to}B_i$.
Objeto terminal: $\mathbf{1} = \{\mathbf{1}_i\}_{i\in I}$ tal que $\mathbf{1}_i = \{i\}$. Para cada fibrado $\{A_i\}_{i\in I}$, as funções $!_i : A_i{\to}\mathbf{1}_i$ são únicas.

Pullbacks: Dada uma família de diagramas $A_i \xrightarrow{f_i} C_i \xleftarrow{g_i} B_i$ em **Set**, calcule cada pullback.

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{q_i} & B_i \\ {\scriptstyle p_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_i} \\ A_i & \xrightarrow[f_i]{} & C_i \end{array}$$

Então o pullback do diagrama

$$\{A_i\}_{i\in I} \xrightarrow{\bar{f}} \{C_i\}_{i\in I} \xleftarrow{\bar{g}} \{B_i\}_{i\in I}$$

em $\mathbf{Bn}(I)$ é dado pelos pullbacks acima.

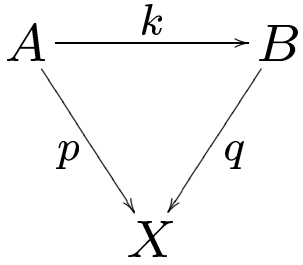
Classificador de subobjetos: Ω é dado por $\Omega_i = 2 \times \{i\}$, com $2 = \{0,1\}$, e $true : \mathbf{1} \to \Omega$ é tal que $true_i(i) = \langle 1, i\rangle$. Se $m_i : B_i \hookrightarrow A_i$ determina um monomorfismo $\bar{m}$ em $\mathbf{Bn}(I)$ então $(\chi_{\bar{m}})_i : A_i \to \Omega_i$ é dado por $(\chi_{\bar{m}})_i = \langle \chi_{m_i}, !_i\rangle$, em que χ_{m_i} é a função característica de m_i e $!_i : A_i \to \{i\}$ é a função canônica.

Exponenciais: Dados $\{A_i\}_{i\in I}$ e $\{B_i\}_{i\in I}$, seja $\{D_i \times \{i\}\}_{i\in I}$ o fibrado tal que, para todo $i \in I$,

$$D_i = \{A_i \xrightarrow{k} \bigcup_{i\in I} B_i \ : \ k(A_i) \subseteq B_i\}.$$

O fibrado acima determina a exponencial B^A em que ev é dado por $ev_i(\langle\langle k, i\rangle, x\rangle) = k(x)$.

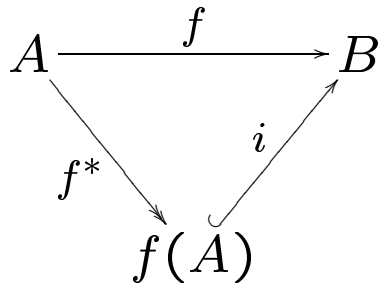
(5) **Feixes geométricos (ou Étale spaces):** Seja X um espaço topológico. Um *feixe geométrico* (ou étale space) sobre X é um par $\langle A, p\rangle$ tal que A é um espaço topológico e $p : A \to X$ é um homeomorfismo local. Isto é, p é contínua e todo $a \in A$ tem uma vizinhança aberta U tal que $p(U)$ é aberto em X, e p aplica U homeomorficamente sobre $p(U)$. Um *morfismo de feixes* de $\langle A, p\rangle$ em $\langle B, q\rangle$ é uma função contínua $k : A \to B$ tal que o diagrama abaixo comuta.



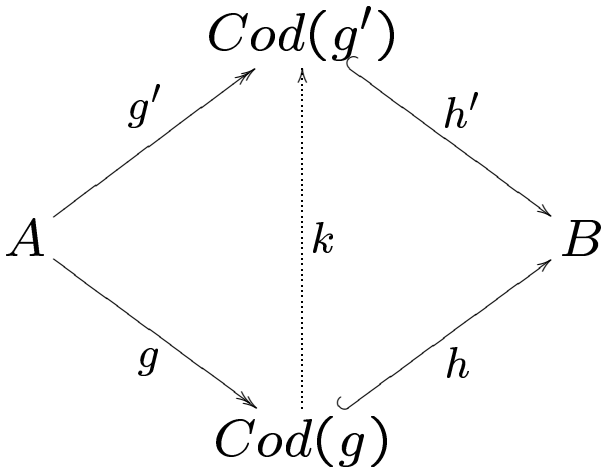
Considerando os morfismos identidade e a composição de morfismos de maneira óbvia, obtemos a categoria dos feixes geométricos (ou étale spaces) sobre X, denominada $\mathbf{Et}(X)$, a qual resulta ser um topos.
É possível caracterizar $\mathbf{Et}(X)$ algébricamente, usando H-sets.
Depois daremos uma caracterização de $\mathbf{Et}(X)$ usando funtores contravariantes (feixes).

Fatoração epi-mono

Observe que todo função $f : \to B$ admite uma fatoração



em que f^* é sobrejetiva e i é injetiva. Aqui, $f(A) = \{f(x) \ : \ x \in A\}$, $f^*(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ e i é a inclusão. (Em geral, um epimorfismo g de X em Y numa categoria $\mathcal{C}$ denota-se por $g : X \twoheadrightarrow Y$.)
Esta fatoração é única a menos de isomorfismos: se $h \circ g = f = h' \circ g'$ com h, h' monos e g, g' epis então existe uma única bijeção $k : Cod(g) \to Cod(g')$ comutando o diagrama.



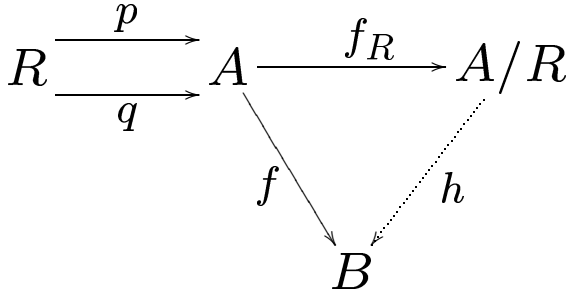
Para generalizar esta construção, é melhor refazê-la em outros termos. Dada uma função $A \xrightarrow{f} B$, considere a relação de equivalência R definida em A: xRy sse $f(x) = f(y)$. Então R é o pullback

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{q} & A \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ A & \xrightarrow[f]{} & B \end{array}$$

em que p, q são as projeções. O quociente A/R e a projecao $f_R : A \to A/R$ são obtidos pelo co-equalisador de $\langle p, q \rangle$.

$$R \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{f_R} A/R$$

Dado que $f \circ p = f \circ q$ então existe uma única função $h : A/R \to B$ tal que o diagrama abaixo comuta, sendo que h é injetora e f_R é sobrejetora, produzindo a fatorização epi-mono de f.



$$h([x]) = f(x)$$

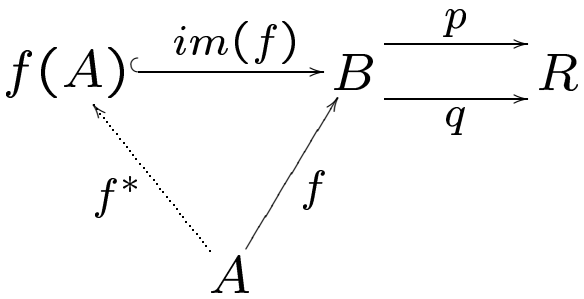
Para generalizar, tomamos por simplicidade a construção dual, isto é: dado um morfismo $A \overset{f}{\to} B$ num topos $\mathcal{C}$, considere o pushout

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ B & \xrightarrow[p]{} & R \end{array}$$

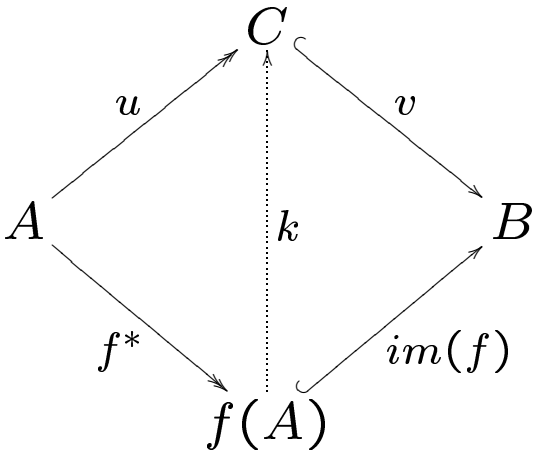
e defina a *imagem de A por f* como sendo o subobjeto $im(f) : f(A) \hookrightarrow B$ obtido do equalisador de $\langle p, q \rangle$.

$$f(A) \overset{im(f)}{\hookrightarrow} B \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} R$$

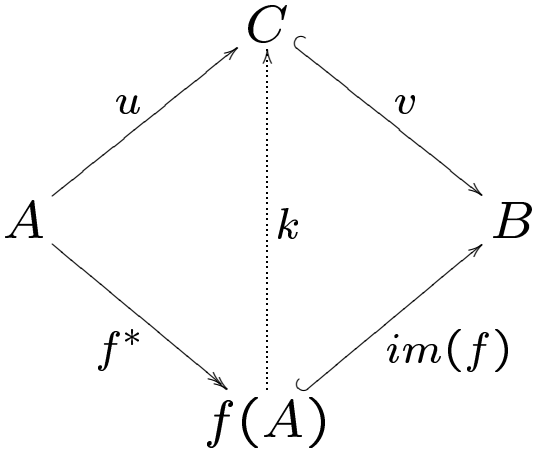
Dado que $q \circ f = p \circ f$, existe um único morfismo $f^* : A \to f(A)$ que comuta o diagrama abaixo.



Proposição: f^* é epimorfismo, e $A \overset{f^*}{\twoheadrightarrow} f(A) \overset{im(f)}{\hookrightarrow} B$ é uma fatoração epi-mono de f. isto é: se $A \overset{u}{\twoheadrightarrow} C \overset{v}{\hookrightarrow} B$ com u epi, v mono e $f = v \circ u$, então existe um único isomorfismo $k : f(A) \to C$ que comuta o diagrama abaixo.



Temos que $im(f)$ é o menor subobjeto através do qual f fatora, isto é: se $f = v \circ u$, com v mono, então existe $k : f(A) \to C$ tal que o diagrama abaixo comuta.



$[im(f)] \leq [v]$

$Sub(A)$ como álgebra de Heyting

O morfismo $false : \mathbf{1} \to \Omega$ é definido como sendo o morfismo característico de $! : \mathbf{0} \to \mathbf{1}$.
O morfismo $\neg : \Omega \to \Omega$ é definido como sendo o morfismo característico de $false : \mathbf{1} \to \Omega$.

Em **Set**, $false(*) = 0$, e $\neg(0) = 1$, $\neg(1) = 0$.

O morfismo $\cap : \Omega \times \Omega \to \Omega$ é definido como sendo o morfismo característico de

$$\langle true, true \rangle : \mathbf{1} \to \Omega \times \Omega.$$

Para todo objeto A, $true_A : A \to \Omega$ denota a composta $A \stackrel{!}{\to} \mathbf{1} \stackrel{true}{\to} \Omega$ (isto é, o morfismo característico de id_A).
O morfismo $\cup : \Omega \times \Omega \to \Omega$ é definido como sendo o morfismo característico da imagem do morfismo

$$[\langle true_\Omega, id_\Omega \rangle, \langle id_\Omega, true_\Omega \rangle] : \Omega \coprod \Omega \to \Omega \times \Omega.$$

Seja $e : \preceq \hookrightarrow \Omega \times \Omega$ o equalisador de

$$\Omega \times \Omega \underset{\pi_1}{\overset{\cap}{\rightrightarrows}} A$$

onde π_1 é a primeira projeção.
Definimos $\Rightarrow : \Omega \times \Omega \to \Omega$ como sendo o morfismo característico do monomorfismo e.

Em **Set**, estas flechas são as funções de verdade clássicas.

Definimos em $Sub(A)$ as seguintes operações: dados $[f], [g] \in Sub(A)$ então

$-f$ é o monomorfismo associado com
$\neg \circ \chi_f : A \to \Omega$;

$f \sqcap g$ é o monomorfismo associado com
$\cap \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle : A \to \Omega$;

$f \sqcup g$ é o monomorfismo associado com
$\cup \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle : A \to \Omega$;

$f \Rightarrow g$ é o monomorfismo associado com
$\Rightarrow \circ \langle \chi_f, \chi_g \rangle : A \to \Omega$.

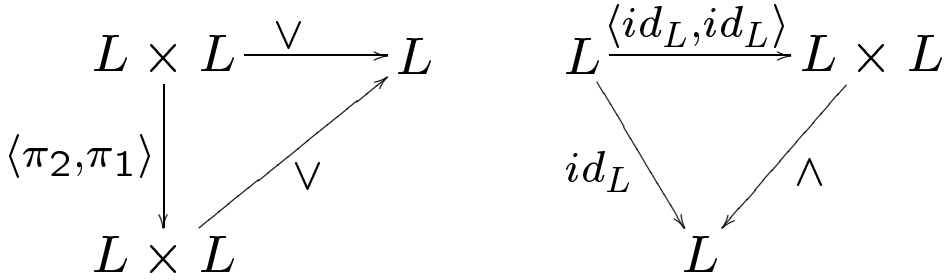
Seja $0_A : \mathbf{0} \hookrightarrow A$ o único (mono)morfismo de $\mathbf{0}$ em A. Definindo $0 = [0_A]$, $1 = [id_A]$, $-[f] = [-f]$ e $[f] \bowtie [g] = [f \bowtie g]$ para $\bowtie \in \{\sqcap, \sqcup, \Rightarrow\}$, temos o seguinte:

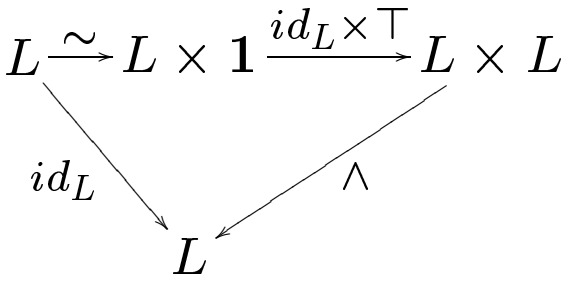
Teorema: A estrutura $\langle Sub(A), -, \sqcap, \sqcup, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ é uma álgebra de Heyting tal que

$$[f] \leq [g] \text{ sse } [f] = [f] \sqcap [g] \text{ sse } [f] = [f] \sqcup [g].$$

$Sub(A)$ é a representação *externa* da generalização de $\wp(A)$, portanto é uma álgebra de Heyting *externa*. A representação *interna* de $Sub(A)$ é Ω^A, que tem estrutura de álgebra de Heyting *interna*: um objeto L de um topos $\mathcal{C}$ é uma álgebra de Heyting (interna) se existem morfismos $\vee : L \times L \to L$, $\wedge : L \times L \to L$, $\Rightarrow : L \times L \to L$, $\bot : \mathbf{1} \to L$ e $\top : \mathbf{1} \to L$ satisfazendo os diagramas que representam as equações correspondentes.

Por exemplo, $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge x = x$ e $x \wedge \top = x$ são dados pela comutatividade dos diagramas abaixo.





Em particular, $\Omega \simeq \Omega^{\mathbf{1}}$ é uma álgebra de Heyting (interna).

Dado que Ω representa a álgebra de valores de verdade do topos $\mathcal{C}$, temos que a *lógica interna* dos topos é intuicionista, e não clássica. Voltaremos depois a este ponto.

Funtores

O conceito de "morfismo de categorias" é dado pela noção de *funtor*.
Um funtor (covariante) F da categoria $\mathcal{C}$ na categoria $\mathcal{D}$, denotado por $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, é uma aplicação que atribui:
(a) Para cada objeto A de $\mathcal{C}$, um objeto $F(A)$ de $\mathcal{D}$;
(b) Para cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ de $\mathcal{C}$, um morfismo $F(A) \overset{F(f)}{\to} F(B)$ de $\mathcal{D}$.
A aplicação F deve satisfazer: $F(id_A) = id_{F(A)}$ e $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ se $Dom(f) = Cod(g)$.
Um funtor preserva domínios, co-domínios, identidades e composições. Um funtor *contravariante* de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ é definido como sendo um funtor covariante $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$. Ou seja, F é um funtor que inverte o sentido das flechas:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad F \quad} & F(A) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle F(f)} \\ B & & F(B) \end{array}$$

$$F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$$

Exemplos:

1) $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $id_{\mathcal{C}}(A) = A$ e $id_{\mathcal{C}}(f) = f$ é um funtor, chamado de *funtor identidade*.

2) **Funtores esquecimento** (*forgetful*)**:** Dada uma categoria $\mathcal{C}$ formada por conjuntos com estrutura, o funtor esquecimento $U : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ "esquece" a estrutura dos objetos. Por exemplo, $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ é dado por $U(\langle M, \cdot, e \rangle) = M$ e $U(f) = f$.

3) Dados dois posets **P** e **Q**, um funtor $F : \mathcal{C}_{\mathbf{P}} \to \mathcal{C}_{\mathbf{Q}}$ é uma função monotônica $F : P \to Q$.

4) **Funtor "partes de":** $\wp : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ é dado por $\wp(A) = \{X \ : \ X \subseteq A\}$ e, se $A \xrightarrow{f} B$, $\wp(f) : \wp(A) \to \wp(B)$ é tal que $\wp(f)(X) = f(X)$.

5) **Funtor "imagem inversa":** $I : \mathbf{Set}^{op} \to \mathbf{Set}$ tal que $I(A) = \wp(A)$ e, se $A \xrightarrow{f} B$, então $I(f) : \wp(B) \to \wp(A)$ é tal que $I(f)(X) = f^{-1}(X)$.

Veremos depois que podemos generalizar 4) e 5) para topos em geral, usando o Lema de Yoneda.

6) Podemos generalizar "externamente" os exemplos 4) e 5) como segue. Dado um topos $\mathcal{C}$, então $Im : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ é dado por $Im(A) = Sub(A)$ e, para cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ de $\mathcal{C}$, $Im(f) : Sub(A) \to Sub(B)$ é definida da maneira seguinte: seja $g : C \hookrightarrow A$ um subobjeto de A; então $Im(f)$ atribui a g o subobjeto

$$im(f \circ g) : (f \circ g)(C) \hookrightarrow B,$$

isto é, a imagem de C por $f \circ g : C \to B$ (veja a seção "Fatoração epi-mono"). Isto generaliza exemplo 4).

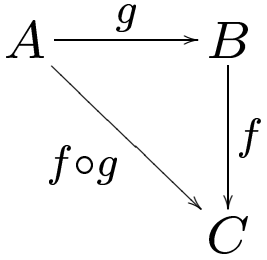
Por outro lado, o exemplo 5) é generalizado através do funtor contravariante $Sub : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ que atribui $Sub(A)$ para cada objeto A de $\mathcal{C}$, e para cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ de $\mathcal{C}$, $Sub(f)$ atribui a cada subobjeto $g : C \hookrightarrow B$ o subobjeto $f^{-1}(g) : f^{-1}(C) \hookrightarrow A$, isto é, a imagem inversa de g pelo morfismo f dada pelo pull-back abaixo.

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(C) & \xhookrightarrow{f^{-1}(g)} & A \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ C & \xhookrightarrow[g]{} & B \end{array}$$

7) **Funtores** Hom**:** Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena, e fixe um objeto A de $\mathcal{C}$. O funtor $Hom_{\mathcal{C}}(A, _) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ atribui a cada objeto B o conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, e a cada morfismo $B \xrightarrow{f} C$ de $\mathcal{C}$ a função

$$Hom_{\mathcal{C}}(A, f) : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

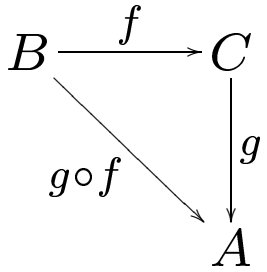
que envia cada morfismo $A \xrightarrow{g} B$ para o morfismo $f \circ g : A \to C$.



O funtor (contravariante) $Hom_{\mathcal{C}}(_, A) : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ atribui a cada objeto B o conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$, e a cada morfismo $B \xrightarrow{f} C$ de $\mathcal{C}$ a função

$$Hom_{\mathcal{C}}(f, A) : Hom_{\mathcal{C}}(C, A) \to Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$$

que envia cada morfismo $C \xrightarrow{g} A$ para o morfismo $g \circ f : B \to A$.



8) Se $\mathcal{C}$ tem produtos finitos então cada objeto A de $\mathcal{C}$ determina um funtor $A \times _ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que B é enviado para $A \times B$, e $B \overset{f}{\to} C$ é enviado para $id_A \times f : A \times B \to A \times C$.

A categoria das categorias (pequenas):

Se $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ são dois funtores, definimos o *funtor composto* $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ da maneira óbvia:
$(G \circ F)(A) = G(F(A))$ para cada $A \in |\mathcal{C}|$;
$(G \circ F)(f) = G(F(f))$ para cada morfismo $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$. Note que a composição de funtores componiveis é associativa.

Podemos definir então a categoria **Cat** cujos objetos são categorias pequenas, e cujos morfismos são funtores. A composição de funtores é a definida acima. Para cada categoria pequena $\mathcal{C}$, o morfismo identidade é dado pelo funtor $id_{\mathcal{C}}$. Observe que **Cat** não é objeto de **Cat**, evitando-se o paradoxo de Russell.

Transformações Naturais e categorias de funtores

Podemos abstrair mais um nível, e considerar categorias cujos objetos são funtores de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$, para categorias fixas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$. Para isso, devemos definir uma noção apropriada de morfismos de funtores $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Este conceito é o de transformação natural,

Fixadas duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dois funtores. Uma *transformação natural* $\eta : F \to G$ é uma família $\eta = \{\eta_A\}_{A \in |\mathcal{C}|}$ de morfismos $\eta_A : F(A) \to G(A)$ em $\mathcal{D}$ indexada pela coleção de objetos de $\mathcal{C}$. A coleção η é natural no sentido seguinte: se $f : A \to B$ é um morfismo de $\mathcal{C}$ então o seguinte diagrama de $\mathcal{D}$ comuta.

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ f \downarrow & & \\ B & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\eta_B]{} & G(B) \end{array}$$

Se $\eta : F \to G$ e $\theta : G \to H$ são transformações naturais, a composta $\theta \circ \eta : F \to H$ é a transformação natural definida de maneira óbvia:

$$(\theta \circ \eta)_A := \theta_A \circ \eta_A.$$

Exemplos

1) A transformação natural *identidade em* F, $id_F : F \to F$, é dada por $(id_F)_A = id_{F(A)}$.

2) Se $\eta : F \to G$ é tal que cada morfismo η_A é um isomorfismo em $\mathcal{D}$, então definimos a transformação natural inversa de η, $\eta^{-1} : G \to F$, dada por $\eta^{-1} = \{\eta_A^{-1}\}_{A \in |\mathcal{C}|}$. Note que $\eta^{-1} \circ \eta = id_F$ e $\eta \circ \eta^{-1} = id_G$. Dizemos que η é um *isomorfismo natural*.

3) Fixe um objeto A numa categoria $\mathcal{C}$ com produtos finitos. Podemos definir um funtor $_ \times A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ de maneira análoga com a definição do funtor $A \times _$. Se π_A e π_B são as projeções do produto $A \times B$, seja $tw_B = \langle \pi_B, \pi_A \rangle$. Então $tw_B : A \times B \to B \times A$ é um isomorfismo em $\mathcal{C}$ que determina um isomorfismo natural $tw : A \times _ \to _ \times A$.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. A *categoria de funtores* $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ tem como objetos funtores $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, e transformações naturais como morfismos. O morfismo identidade em F é id_F, e a composição de transformações naturais é dada como acima. Os isomorfismos naturais são os isomorfismos de $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Teorema: Se $\mathcal{C}$ é uma categoria pequena, então $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ é um topos.

Exemplo:

Feixes sobre um espaço topológico. Seja X um espaço topológico, e identifique o reticulado completo $\Omega(X)$ com a categoria $\mathcal{C}_{\Omega(X)}$. Um *pré-feixe sobre* X é um funtor contravariante $F : \Omega(X)^{op} \to \mathbf{Set}$. A categoria $\mathbf{Psh}(X)$ de prefeixes sobre X é a categoria $\mathbf{Set}^{\Omega(X)^{op}}$ de funtores contravariantes e transformações naturais. Se F é um pré-feixe e U e V são abertos de X tais que $U \subseteq V$ então existe uma função de *restrição* $F(m_V^U) : F(V) \to F(U)$. Se $x \in F(V)$ escreveremos $x_{|U}$ para denotar $F(m_V^U)(x)$, a restrição de x a U.

Um pré-feixe F sobre X é um *feixe* se, para todo aberto U, para toda cobertura por abertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de U, e para toda família $\{x_i\}_{i\in I}$ tal que $x_i \in F(U_i)$ e $x_{i|U_i\cap U_j} = x_{j|U_i\cap U_j}$ para todo $i,j \in I$, existe um único $x \in F(U)$ tal que $x_{|U_i} = x_i$ para todo $i \in I$. Em termos de diagramas: para todo aberto U e para toda cobertura por abertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de U, o diagrama em **Set**

$$F(U) \xrightarrow{\ e\ } \prod_i F(U_i) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

dado por $e(x) = \{x_{|U_i}\}_{i\in I}$,
$p(\{x_i\}_{i\in I}) = \{x_{i|U_i\cap U_j}\}_{i,j\in I}$,
$q(\{x_i\}_{i\in I}) = \{x_{j|U_i\cap U_j}\}_{i,j\in I}$

é um equalisador. A categoria $\mathbf{Sh}(X)$ de feixes sobre X e transformações naturais é um topos.
Um exemplo inspirador de feixes sobre X é o feixe das funções reais contínuas sobre X.

Equivalência de categorias

Se duas categorias são isomorfas então são esencialmente a mesma. Por exemplo, em **Cat** elas seriam indistinguíveis. Em geral, um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é um *isomorfismo de categorias* se existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $G \circ F = id_{\mathcal{C}}$ e $F \circ G = id_{\mathcal{D}}$. Existem maneiras mais sutis (e úteis) de duas categorias serem "esencialmente a mesma":
Um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma *equivalência de categorias* se existe um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e existem isomorfismos naturais $\eta : id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ e $\theta : id_{\mathcal{D}} \to F \circ G$. Duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são *equivalentes* se existe uma equivalência de categorias entre elas.
As categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são *duais* se $\mathcal{C}^{op}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes. A equivalência entre $\mathcal{C}^{op}$ e $\mathcal{D}$ é dita uma *dualidade* entre $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

Exemplos

1) Um espaço topológico X é *sóbrio* se todo fechado irredutível é o fecho de um único ponto de X (um fechado é *irredutível* se não pode ser expresso como $F_1 \cup F_2$ tal que F_1 e F_2 são fechados, diferentes de F). Os espaços topológicos sóbrios e as funções contínuas formam a categoria **Sob**.

Seja $\mathcal{H}$ a categoria de álgebras de Heyting completas (aHc) e morfismos que preservam ínfimos finitos e supremos arbitrários, e seja $\mathbf{Loc} = \mathcal{H}^{op}$ a categoria de *locales*. Um *ponto* de um locale H é um morfismo $p : H \to 2$ em $\mathcal{H}$, onde $2 = \{0, 1\}$ com a sua estrutura de aHc óbvia. Um locale H é *espacial* (ou *tem suficientes pontos*) se para todo $a, b \in H$ com $a \neq b$, existe um ponto p tal que $p(a) \neq p(b)$. Os locales espaciais com morfismos de locales formam uma categoria **SLoc**.

O funtor $\Omega : \mathbf{Sob} \to \mathbf{SLoc}$ que atribui a cada espaço topológico sóbrio X o seu reticulado de abertos $\Omega(X)$ e a cada função contínua $X \xrightarrow{f} Y$ atribui a função $f^{-1} : \Omega(Y) \to \Omega(X)$ estabelece uma equivalência de categorias.

2) O Teorema de Gelfand-Naimark (ou Teorema fundamental das álgebras C^*) estabelece uma dualidade entre a categoria de espaços topológicos Hausdorff compactos e álgebras C^* comutativas. O funtor C que realiza a dualidade é definido nos objetos como

$$C(X) = \{X \xrightarrow{f} \mathbb{C} \ : \ f \text{ é uma função contínua}\}.$$

O funtor na direção contrária é dado por $Spec\mathcal{A}$, que atribui a cada C^*-álgebra $\mathcal{A}$ o seu espectro (um espaço topológico).

3) Um espaço topológico sóbrio X é *coerente* se o conjunto $K\Omega(X)$ de abertos compactos de X é fechado por interseções finitas e forma uma base para a topologia de X. Um morfismo de espaços coerentes é uma função contínua tal que a pré-imagem de compactos é compacta. Seja **CohSp** a categoria de espaços coerentes e seus morfismos.

Teorema de Representação de Stone para reticulados distributivos: Existe uma dualidade entre a categoria **DLat** de reticulados distributivos e a categoria **CohSp**.

4) Um espaço topológico é *de Stone* se é Hausdorff e coerente (sse é compacto, Hausdorff e totalmente disconexo). Seja **Stone** a categoria de espaços de Stone e funções contínuas, e seja **Boole** a categoria de álgebras de Boole e seus homomorfismos.

Teorema de Representação de Stone para álgebras de Boole: Existe uma dualidade entre a categoria **Boole** e a categoria **Stone**.

5) $\mathbf{Bn}(I)$: Um conjunto I pode ser visto como uma categoria com coleção de objetos I e apenas com morfismos identidade. Um funtor $F : I \to \mathbf{Set}$ é uma família de conjuntos $\{F_i\}_{i \in I}$; claramente F é naturalmente isomorfo com $\bar{F}$, dado por $\{F_i \times \{i\}\}_{i \in I}$. Um objeto $f : A \to I$ de $\mathbf{Bn}(I)$ determina um funtor $\bar{f} : I \to \mathbf{Set}$ dado por $\bar{f}(i) = f^{-1}(i)$. Um morfismo de fibrados $\bar{h} : f \to g$ determina uma transformação natural $\{h_i\}_{i \in I} : \bar{f} \to \bar{g}$. Temos então uma equivalência de categorias entre $\mathbf{Bn}(I)$ e $\mathbf{Set}^I$ (fato usado anteriormente de maneira informal).

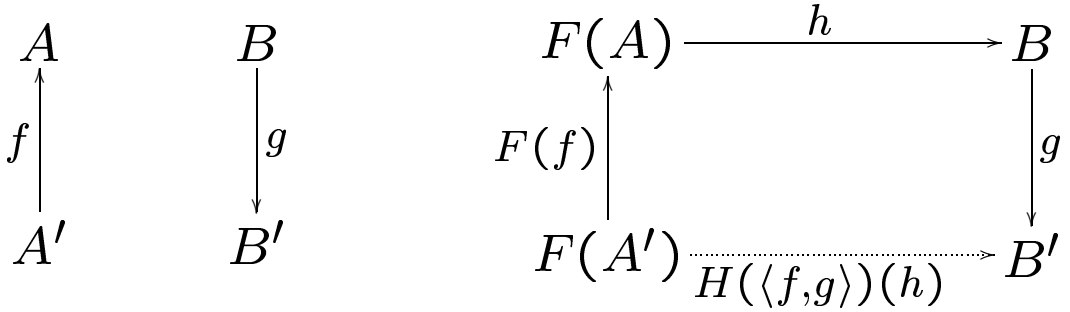
6) As categorias $\mathbf{Et}(X)$ e $\mathbf{Sh}(X)$ de étale spaces e de feixes sobre X são equivalentes.

Adjunção

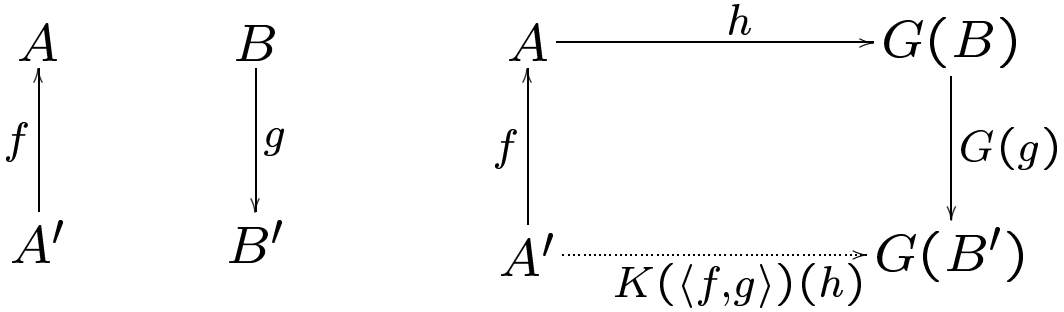
A noção de adjunção é uma das maiores contribuições da teoria de categorias para o pensamento matemático.
Uma *adjunção* consiste num par de funtores $F : \mathcal{C} \to D$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que, para cada $A \in |\mathcal{C}|$ e $B \in |\mathcal{D}|$, existe uma bijeção natural

$$\theta_{AB} : Hom_{\mathcal{D}}(F(A), B) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, G(B)).$$

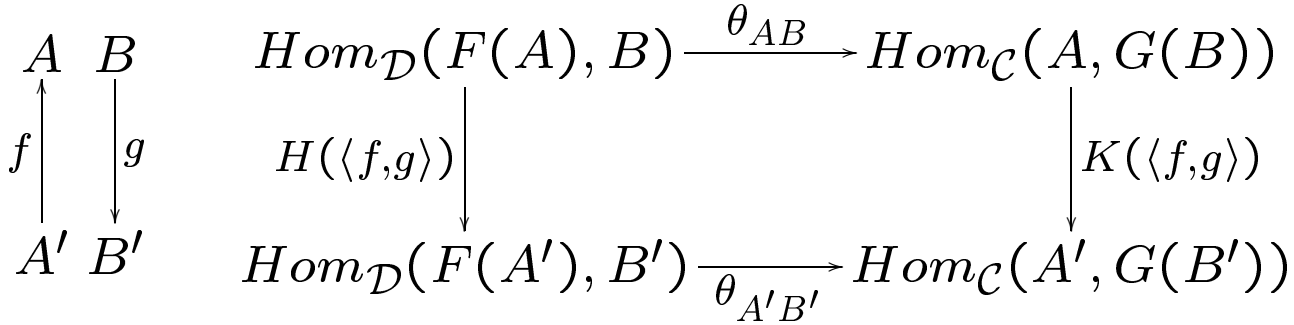
Aqui, "natural" significa o seguinte:
Considere primeiro o funtor $H : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ dado por $H(\langle A, B\rangle) = Hom_{\mathcal{D}}(F(A), B)$ tal que, se $f : A' \to A$ em $\mathcal{C}$ e $g : B \to B'$ em $\mathcal{D}$ então $H(\langle f, g\rangle)(h) = g \circ h \circ F(f)$ para todo $h : F(A) \to B$.



Analogamente, considere o funtor $K : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D} \to \mathbf{Set}$ dado por $K(\langle A, B\rangle) = Hom_{\mathcal{C}}(A, G(B))$ tal que, se $f : A' \to A$ em $\mathcal{C}$ e $g : B \to B'$ em $\mathcal{D}$ então $K(\langle f, g\rangle)(h) = G(g) \circ h \circ f$ para todo $h : A \to G(B)$.



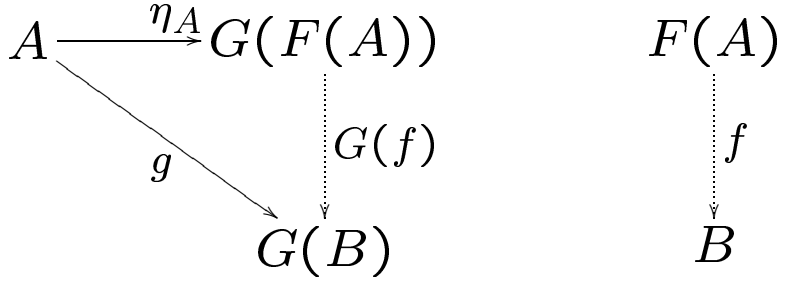
Então, $\theta = \{\theta_{AB}\}_{\langle A,B\rangle \in |\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{D}|}$ é um isomorfismo natural tal que $\theta : H \to K$. Ou seja, as funções θ_{AB} são bijetivas e, se $f : A' \to A$ em $\mathcal{C}$ e $g : B \to B'$ em $\mathcal{D}$ então o diagrama abaixo comuta.



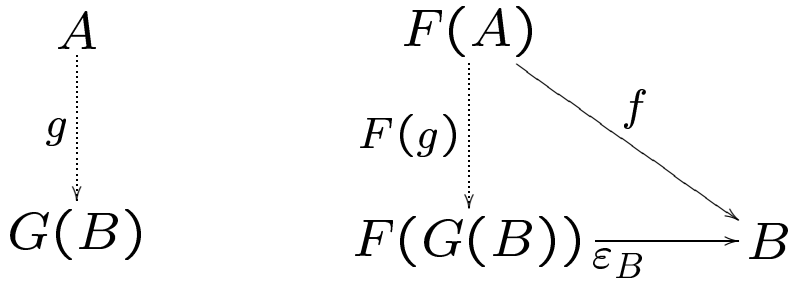
Nesse caso, F é adjunto à esquerda de G e G é adjunto à direita de F, representado por

$$\frac{A \to G(B)}{F(A) \to B} \qquad F \dashv G \qquad G \vdash F \ .$$

Proposição: Dados $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ então $F \dashv G$ sse existem transformações naturais $\eta : id_{\mathcal{C}} \to G \circ F$ e $\varepsilon : F \circ G \to id_{\mathcal{D}}$ satisfazendo o seguinte:
(1) Para cada $g : A \to G(B)$ em $\mathcal{C}$, existe um único $f : F(A) \to B$ em $\mathcal{D}$ tal que o diagrama abaixo comuta.



(2) Para cada $f : F(A) \to B$ em $\mathcal{D}$, existe um único $g : A \to G(B)$ em $\mathcal{C}$ tal que o diagrama abaixo comuta.

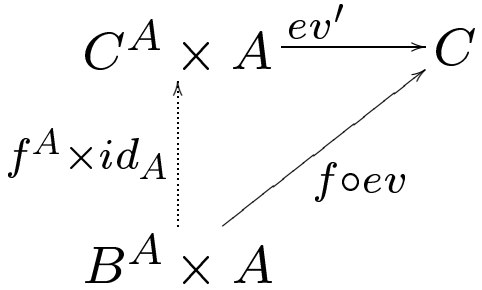


Exemplos

(1) Se $\mathcal{C}$ tem exponenciais, a bijeção

$$Hom_{\mathcal{C}}(B \times A, C) \cong Hom_{\mathcal{C}}(B, C^A)$$

provém de uma adjunção. Com efeito, fixado $A \in |\mathcal{C}|$, o funtor $_ \times A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tem como adjunto à direita o funtor $(_)^A : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ que atribui, a cada B, o objeto B^A, e a cada morfismo $f : B \to C$ o morfismo $f^A : B^A \to C^A$ que é o adjunto exponencial de $f \circ ev : B^A \times A \to C$, isto é, o único morfismo que comuta o diagrama abaixo.



Aqui, $ev : B^A \times A \to B$ e $ev' : C^A \times A \to C$ são os morfismos asociados a B^A e C^A, respectivamente. A situação de adjunção é

$$\frac{B \to C^A}{B \times A \to C} \ .$$

(2) Em particular, se H é uma álgebra de Heyting (vista como a categoria $\mathcal{C}_H$) então a adjunção anterior produz

$$\frac{z \leq x \Rightarrow y}{z \wedge x \leq y}\ .$$

(3) **Conexões de Galois:** Sejam S e T dois posets. Uma *conexão de Galois* é um par $\langle f, g\rangle$ tal que $f : T \to S$ e $g : S \to T$ são funções monotônicas tais que para todo $s \in S$ e $t \in T$

$$t \leq g(s) \text{ sse } f(t) \leq s.$$

Isto significa que, considerando f e g como funtores $f : \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}_S$ e $g : \mathcal{C}_S \to \mathcal{C}_T$, então $f \dashv g$, isto é, g é adjunto à direita de f. Temos que g preserva ínfimos e f preserva supremos.
(4) Em particular, se $S = T = H$ (uma álgebra de Heyting), $g(y) = x \Rightarrow y$ e $f(z) = z \wedge x$ (para $x \in H$ fixo) então recuperamos de novo a adjunção do exemplo (2).
(5) O funtor esquecimento $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ tem como adjunto à esquerda o funtor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ que atribui a cada conjunto X a topologia indiscreta $\{\emptyset, X\}$ sobre X.
(6) O funtor esquecimento $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ tem como adjunto à esquerda o funtor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ tal que $F(X)$ é o grupo livre gerado por X.

(7) O funtor inclusão $I : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ da categoria dos grupos abelianos na categoria dos grupos tem como adjunto à esquerda o funtor $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ tal que $F(G) = G/[G, G]$.
(8) O funtor esquecimento $U : R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$ da categoria dos R-módulos em **Set** tem como adjunto à esquerda o funtor $F : \mathbf{Set} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ que atribui a cada conjunto X o R-módulo livre com base X.
(9) O funtor inclusão $I : \mathbf{CompMet} \to \mathbf{Met}$ da categoria dos espaços métricos completos na categoria dos espaços métricos tem como adjunto à esquerda o funtor $F : \mathbf{Met} \to \mathbf{CompMet}$ que atribui a cada espaço métrico o seu completamento.

O Lema de Yoneda

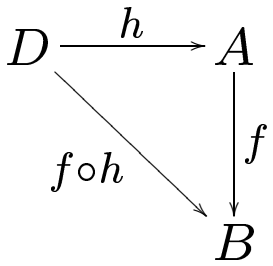
Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena (isto é, a coleção $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ é um conjunto, para todo par de objetos A, B), e considere a categoria $\widehat{\mathcal{C}} := \mathbf{Set}^{\mathcal{C}^{op}}$ de pré-feixes sobre $\mathcal{C}$. Para cada objeto A de $\mathcal{C}$, podemos associar o objeto $\mathbf{y}(A) = Hom_{\mathcal{C}}(_, A)$ de $\widehat{\mathcal{C}}$. Por outro lado, se $f : A \to B$ é um morfismo em $\mathcal{C}$ então existe uma transformação natural $\mathbf{y}(f) : \mathbf{y}(A) \to \mathbf{y}(B)$ definida da maneira seguinte: $\mathbf{y}(f) = \{\mathbf{y}(f)_D\}_{D \in |\mathcal{C}|}$, onde

$$\mathbf{y}(f)_D : Hom_{\mathcal{C}}(D, A) \to Hom_{\mathcal{C}}(D, B)$$

é dado por

$$\mathbf{y}(f)_D(h) = f \circ h$$

para todo morfismo $h : D \to A$ em $\mathcal{C}$.



Exercício: Verifique que $\mathbf{y}(f)$ é transformação natural.

Proposição (Imersão de Yoneda) A aplicação $\mathbf{y} : \mathcal{C} \to \widehat{\mathcal{C}}$ dada por $A \mapsto \mathbf{y}(A)$ e $f \mapsto \mathbf{y}(f)$ é um funtor.

Teorema (Lema de Yoneda) Seja $\mathcal{C}$ uma categoria localmente pequena. Se $F : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ é um funtor e A é um objeto de $\mathcal{C}$ então existe uma bijeção

$$\mathcal{Y} : Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(A), F) \to F(A)$$

que associa, para cada transformação natural $\eta : \mathbf{y}(A) \to F$, o elemento $\eta_A(id_A)$ de $F(A)$.

Pelo Lema de Yoneda, uma transformação natural $\eta : \mathbf{y}(A) \to F$ é codificada pela seção $\eta_A(id_A)$ de $F(A)$. Ou seja, toda a informação sobre a transformação natural η está contida na seção $\eta_A(id_A)$ (dado $F \in |\widehat{\mathcal{C}}|$, os elementos de $F(A)$ são ditos *seções* sobre A). Utilizamos isto para *internalizar*, através de morfismos, operações entre certas entidades de uma categoria que são definidas *externamente* (por exemplo, a estructura de reticulado das álgebras de subobjetos e as operações de quantificação).

A partir da prova do Lema de Yoneda, existe uma bijeção

$$\mathcal{Y}^{-1} : F(A) \to Hom_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathbf{y}(A), F)$$

dada por $\mathcal{Y}^{-1}(s) = \eta$,
$\eta_D : Hom_{\mathcal{C}}(D, A) \to F(D)$,
$\eta_D(h) = F(h)(s)$.

Uma consequência importante do Lema de Yoneda é a seguinte:

Corolário: A imersão de Yoneda é um funtor fiel e pleno.

(Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \to D$ é *fiel* (*faith-full*) e *pleno* (*full*) se a aplicação $f \mapsto F(f)$ que envia morfismos de $\mathcal{C}$ em morfismos de $\mathcal{D}$ é uma bijeção.)

Aplicações do lema de Yoneda

(1) **Álgebra de subobjetos:** seja $\mathcal{C}$ um topos. Para cada objeto A de $\mathcal{C}$ o conjunto $Sub(A)$ dos subobjetos de A é *internalizado* através do objeto Ω^A de $\mathcal{C}$. Vimos que $Sub(A)$ é uma álgebra de Heyting

$$\langle Sub(A), \sqcap_A, \sqcup_A, \Rightarrow_A, \neg_A, \top, \bot \rangle.$$

Dado que as operações acima são *naturais* então, pelo Lema de Yoneda, podemos definir morfismos em $\mathcal{C}$

$$\wedge_A : \Omega^A \times \Omega^A \rightarrow \Omega^A$$

$$\vee_A : \Omega^A \times \Omega^A \rightarrow \Omega^A$$

$$\Rrightarrow_A : \Omega^A \times \Omega^A \rightarrow \Omega^A$$

$$\sim_A : \Omega^A \rightarrow \Omega^A$$

tais que, junto com os morfismos $\top_A, \bot_A : 1 \rightarrow \Omega^A$, definem uma álgebra de Heyting interna

$$\langle \Omega^A, \wedge_A, \vee_A, \Rrightarrow_A, \sim_A, \top_A, \bot_A \rangle.$$

Tomemos, por exemplo, o caso do ínfimo. Fixe $A \in |\mathcal{C}|$. Para cada objeto B de $\mathcal{C}$, a operação

$$\sqcap_{A\times B} : Sub(A \times B) \times Sub(A \times B) \to Sub(A \times B)$$

é natural em B. Usando as bijeções naturais $Sub(A \times B) \cong Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A)$ e $Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A \times \Omega^A) \cong Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A)$ obtemos uma família de funções

$$\cap_B^A : Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A \times \Omega^A) \to Hom_{\mathcal{C}}(B, \Omega^A)$$

indexada por $B \in |\mathcal{C}|$, natural em B. Isto é, a família $\cap^A = \{\cap_B^A\}_{B\in|\mathcal{C}|}$ é uma transformação natural

$$\cap^A : \mathbf{y}(\Omega^A \times \Omega^A) \to \mathbf{y}(\Omega^A).$$

Usando o Lema de Yoneda (tomando $F = \mathbf{y}(\Omega^A)$) vemos que $\cap^A$ (a construção externa de $\sqcap_{A\times B}$, para todo $B \in |\mathcal{C}|$) pode ser *internalizada* (e codificada) na seção $\wedge_A := \mathcal{Y}(\cap^A)$. Observe que $\wedge_A \in \mathbf{y}(\Omega^A)(\Omega^A \times \Omega^A)$, isto é, $\cap^A$ é internalizada através de um morfismo $\wedge_A : \Omega^A \times \Omega^A \to \Omega^A$.

Em particular, tomando $A = \mathbf{1}$ então a construção externa do ínfimo $\sqcap_B$ nos conjuntos $Sub(B)$ (para todo $B \in |\mathcal{C}|$) resulta ser natural em B, sendo então internalizada por um morfismo $\wedge : \Omega \times \Omega \to \Omega$.
Analogamente, podemos internalizar as outras operações definidas em $Sub(A)$, demonstrando então que Ω^A é uma álgebra de Heyting interna em $\mathcal{C}$. Em particular, provamos que Ω $(= \Omega^{\mathbf{1}})$ é uma álgebra de Heyting interna em $\mathcal{C}$.
(2) **Quantificadores num topos:** Seja $\mathcal{C}$ um topos. Dado um morfismo $f : A \to B$, então pode ser provado que a função monotônica $f^{-1} : Sub(B) \to Sub(A)$ tem adjunto à esquerda $\exists_f : Sub(A) \to Sub(B)$ e adjunto à direita $\forall_f : Sub(A) \to Sub(B)$. Isso significa que, para todo $[m] \in Sub(A)$ e para todo $[n] \in Sub(B)$,

$$\exists_f([m]) \leq [n] \quad \text{sse} \quad [m] \leq f^{-1}([n]),$$

$$[n] \leq \forall_f([m]) \quad \text{sse} \quad f^{-1}([n]) \leq [m].$$

Note que $\exists_f([m])$ é $[im(f \circ m)]$, isto é, $[Im(f)([m])]$, a imagem do morfismo $f \circ m$ definida anteriormente. No caso em que $A = B \times D$ (para algum D) e f é a projeção canônica então $\exists_f$ é dito o *quantificador existencial* e $\forall_f$ é dito o *quantificador universal*. Usando o Lema de Yoneda podemos internalizar as operações externas $\exists_f$ e $\forall_f$.
Com efeito: para cada objeto $D \in |\mathcal{C}|$, usando as bijeções naturais em D

$$Hom_{\mathcal{C}}(D, \Omega^A) \cong Hom_{\mathcal{C}}(D \times A, \Omega) \cong Sub(D \times A),$$

$$Hom_{\mathcal{C}}(D, \Omega^B) \cong Hom_{\mathcal{C}}(D \times B, \Omega) \cong Sub(D \times B)$$

obtemos uma função

$$(\exists_f)_D : Hom_{\mathcal{C}}(D, \Omega^A) \to Hom_{\mathcal{C}}(D, \Omega^B)$$

(quantificando ao longo do morfismo $id_D \times f : D \times A \to D \times B$). A família $\eta = \{(\exists_f)_D\}_{D \in |\mathcal{C}|}$ é natural em D, isto é,

$$\eta : \mathbf{y}(\Omega^A) \to \mathbf{y}(\Omega^B)$$

é uma transformação natural.

Pelo Lema de Yoneda (tomando $F = \mathbf{y}(\Omega^B)$), a transformação η é codificada por uma seção $\overline{\exists_f} := \mathcal{Y}(\eta)$ de $\mathbf{y}(\Omega^B)(\Omega^A)$. Ou seja, existe um único morfismo $\overline{\exists_f} : \Omega^A \to \Omega^B$ que internaliza a família de construções externas $(\exists_f)_D : Hom_{\mathcal{C}}(D, \Omega^A) \to Hom_{\mathcal{C}}(D, \Omega^B)$, para $D \in |\mathcal{C}|$. Analogamente podemos internalizar a construção de $\forall_f$.

(3) **Funtor imagem direta:** o funtor "partes de": $\wp : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ foi generalizado "externamente" através do funtor $Im : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$. Pela naturalidade da operação $Im(f) : Sub(A) \to Sub(B)$ para todo $A \xrightarrow{f} B$, existe, pelo Lema de Yoneda, um morfismo $\bar{f} : \Omega^A \to \Omega^B$ que "internaliza" esta operação. Isto define um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $F(A) = \Omega^A$ e $F(f) = \bar{f}$ para cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$.

(4) **Funtor imagem inversa:** pelo Lema de Yoneda, existe um morfismo $f^* : \Omega^B \to \Omega^A$, para cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$, que "internaliza" a operação $f^{-1} : Sub(B) \to Sub(A)$. Isto origina um funtor contravariante $G : \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$ tal que $G(A) = \Omega^A$ e $G(f) = f^*$ para cada morfismo $A \xrightarrow{f} B$ em $\mathcal{C}$.

Lógica e Categorias: Semântica de linguagens de Primeira Ordem

Uma assinatura de primeira ordem Σ é definida a partir do seguinte:
(i) Um conjunto $Sorts$ de *sortes*;
(ii) Um conjunto $\mathcal{F}$ de *símbolos de funções*, assim como uma função $t : \mathcal{F} \to Sorts^*$ que atribui a cada f seu *tipo*. Aqui, $Sorts^*$ é o monoide das palavras finitas sobre o alfabeto $Sorts$. Se $t(f) = s_1 \cdots s_n s$ (com $s_1, \ldots, s_n, s \in Sorts$) escreveremos $f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s$. Se $t(f) = s$, com $s \in Sorts$, dizemos que f é uma constante do tipo s.
(iii) Um conjunto $\mathcal{P}$ de *símbolos de predicados*, assim como uma função $tp : \mathcal{P} \to Sorts^*$ que atribui a cada P seu *tipo*. Se $tp(P) = s_1 \cdots s_n$ (com $s_1, \ldots, s_n \in Sorts$) escreveremos $P(s_1, \ldots, s_n)$. Se $tp(P) = \epsilon$ (a palavra vazia) dizemos que P é uma constante lógica. Assumimos, para cada $s \in Sorts$, símbolos de igualdade $=_s(s, s)$.
(iv) Para cada sorte s, um conjunto enumerável $\mathcal{V}_s$ de variáveis do tipo s.

Por recursão definimos o conjunto $\mathbf{Ter}_\Sigma$ dos termos, junto com o tipo deles. Se $t \in \mathbf{Ter}_\Sigma$ tem tipo s, escreveremos $t : s$.
(i) $\bigcup_{s \in Sorts} \mathcal{V}_s \subseteq \mathbf{Ter}_\Sigma$; se $x \in \mathcal{V}_s$ então $x : s$.
(ii) Se $t_i : s_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ e $f : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ então $f(t_1, \ldots, t_n) : s$. Em particular, se f é uma constante do tipo s, então $f : s$.

Por recursão definimos o conjunto $\mathbf{For}_\Sigma$ das fórmulas.
(i) Se $t_i : s_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ e $P(s_1, \cdots, s_n)$ então $P(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{For}_\Sigma$. Em particular, se $P(\epsilon)$ é uma constante lógica então $P \in \mathbf{For}_\Sigma$. Para cada $s \in Sorts$ e para cada $t_1 : s$, $t_2 : s$, temos que $(t_1 =_s t_2) \in \mathbf{For}_\Sigma$. Todas estas fórmulas são ditas *atômicas*.
(ii) Se $\alpha, \beta \in \mathbf{For}_\Sigma$ então $(\alpha \bowtie \beta) \in \mathbf{For}_\Sigma$ para $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \to\}$.
(iii) Se $\alpha \in \mathbf{For}_\Sigma$ então $\neg\alpha \in \mathbf{For}_\Sigma$.
(iv) Se $\alpha \in \mathbf{For}_\Sigma$, $s \in Sorts$ e $x \in \mathcal{V}_s$ então $\forall x\alpha \in \mathbf{For}_\Sigma$ e $\exists x\alpha \in \mathbf{For}_\Sigma$.

As noções de variável livre numa fórmula e de termo livre para uma variável numa fórmula são as usuais.

Seja $\mathcal{C}$ um topos. Uma Σ-*estrutura* sobre $\mathcal{C}$ é uma função M tal que:
(i) $M(s)$ é um objeto de $\mathcal{C}$ para todo $s \in Sorts$.
(ii) Se $s_1 \cdots s_n \in Sorts^*$ então $M(s_1 \cdots s_n) = \prod_{i=1}^{n} M(s_i)$. Em particular, $M(\epsilon) = \mathbf{1}$.
(iii) Se $f : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ então

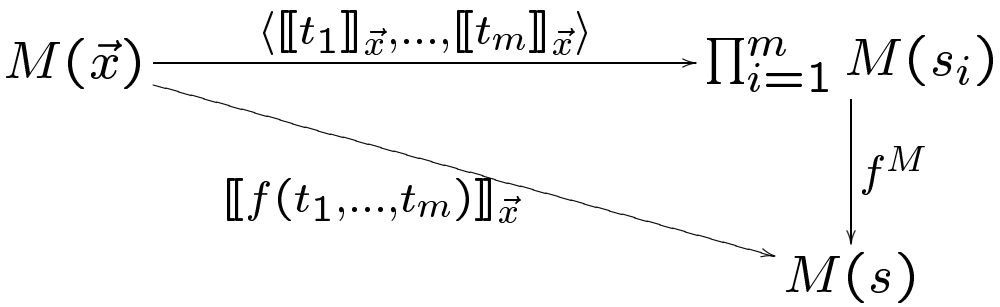
$$M(f) : \prod_{i=1}^{n} M(s_i) \to M(s)$$

é um morfismo de $\mathcal{C}$, denotado por f^M. Em particular, se $f : s$ é uma constante então $f^M : \mathbf{1} \to M(s)$.
(iv) Se $P(s_1, \ldots, s_n)$ então

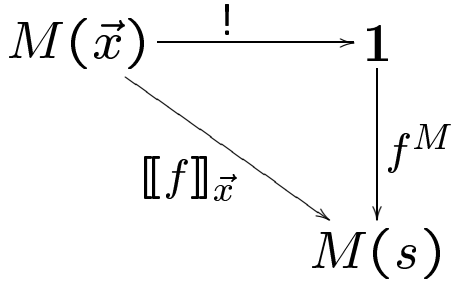
$$M(P) : Dom(M(P)) \hookrightarrow \prod_{i=1}^{n} M(s_i)$$

é um monomorfismo, denotado por P^M, tal que $M(=_s)$ é o monomorfismo $\langle id_{M(s)}, id_{M(s)} \rangle : M(s) \hookrightarrow M(s) \times M(s)$. Se P é uma constante lógica então $P^M : Dom(P^M) \hookrightarrow \mathbf{1}$.

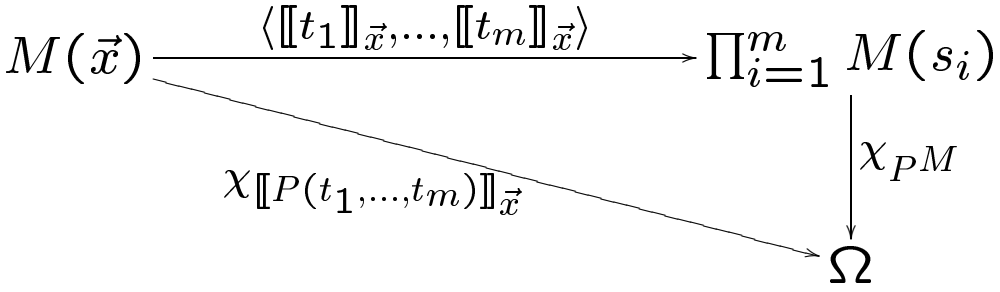
Para interpretar as fórmulas e os termos numa estrutura M, usamos contextos.
Um *contexto* é uma sequência finita $\vec{x}$ de variáveis diferentes. Um contexto $\vec{x}$ é um contexto para um termo t se toda variável que ocorre em t aparece em $\vec{x}$. O conjunto de termos do tipo s que tem $\vec{x}$ como contexto é denotado por $\mathbf{Ter}^s_\Sigma(\vec{x})$. Um contexto $\vec{x}$ é um contexto para uma fórmula α se toda variável livre de α aparece em $\vec{x}$.
Seja M uma estrutura sobre um topos $\mathcal{C}$, e $\vec{x}$ um contexto. Se $\vec{x} = x_1 \cdots x_n$ com $x_i : s_i$ então $M(\vec{x})$ denota $M(s_1 \cdots s_n)$. Definimos por recursão uma função $[\![\cdot]\!]_{\vec{x}}$ que associa, a cada termo $t \in \mathbf{Ter}^s_\Sigma(\vec{x})$, um morfismo $[\![t]\!]_{\vec{x}} : M(\vec{x}) \to M(s)$ de $\mathcal{C}$, e a cada fórmula φ tal que $\vec{x}$ é um contexto para φ, um subobjeto $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}} : Dom([\![\varphi]\!]_{\vec{x}}) \hookrightarrow M(\vec{x})$, como segue:
(1) $[\![x_i]\!]_{\vec{x}}$ é a projeção sobre a cordenada i.
(2) Se $t_i : s_i$ então $[\![f(t_1, \ldots, t_m)]\!]_{\vec{x}}$ é $f^M \circ \langle [\![t_1]\!]_{\vec{x}}, \ldots, [\![t_m]\!]_{\vec{x}} \rangle$.



Em particular, se $f : s$ é uma constante, então $[\![f]\!]_{\vec{x}} = f^M \circ !$.



(3) Se $t_i : s_i$ e $P(s_1, \cdots, s_m)$ então $[\![P(t_1, \ldots, t_m)]\!]_{\vec{x}}$ é o monomorfismo associado com o morfismo característico $\chi_{P^M} \circ \langle [\![t_1]\!]_{\vec{x}}, \ldots, [\![t_m]\!]_{\vec{x}} \rangle$.



Em particular, $[\![t_1 =_s t_2]\!]_{\vec{x}}$ é o monomorfismo obtido do equalisador abaixo.

$$Dom([\![t_1 =_s t_2]\!]_{\vec{x}}) \xrightarrow{[\![t_1 =_s t_2]\!]_{\vec{x}}} M(\vec{x}) \underset{[\![t_2]\!]_{\vec{x}}}{\overset{[\![t_1]\!]_{\vec{x}}}{\rightrightarrows}} M(s)$$

(4) $[\![\alpha \bowtie \beta]\!]_{\vec{x}} = [\![\alpha]\!]_{\vec{x}} \bowtie [\![\beta]\!]_{\vec{x}}$, onde $\bowtie$ é calculada em $Sub(M(\vec{x}))$ para $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$.
(5) $[\![\neg\alpha]\!]_{\vec{x}} = \neg[\![\alpha]\!]_{\vec{x}}$, onde $\neg$ é calculada em $Sub(M(\vec{x}))$.

(6) $[\![\exists x\alpha]\!]_{\vec{x}} = \exists_\pi([\![\alpha]\!]_{\vec{x};y})$ tal que $\pi : M(\vec{x}; y) \to M(\vec{x})$ é a projeção sobre $M(\vec{x})$ e y é a primeira variável livre para x em α que não ocorre no contexto $\vec{x}$.
(7) Analogamente $[\![\forall x\alpha]\!]_{\vec{x}} = \forall_\pi([\![\alpha]\!]_{\vec{x};y})$.

Se $\vec{x} = \emptyset$ então $M(\vec{x}) = \mathbf{1}$ e o morfismo característico χ de $[\![\varphi]\!]_{\vec{x}}$ é da forma $\chi : \mathbf{1} \to \Omega$, um valor de verdade no topos (o valor de verdade da sentença φ na estrutura M).

Se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é um conjunto finito de fórmulas e $\vec{x}$ é um contexto para este conjunto, dizemos que φ *segue semânticamente de* Γ *no contexto* $\vec{x}$, denotado $\Gamma \models_{\vec{x}} \varphi$, se

$$\bigwedge_{\gamma \in \Gamma} [\![\gamma]\!]_{\vec{x}} \leq [\![\varphi]\!]_{\vec{x}}$$

para toda estrutura M, onde o ínfimo e a relação $\leq$ são calculados em $Sub(M(\vec{x}))$. Se $\vec{x} = \emptyset$ escreveremos $\Gamma \models \varphi$.

Teorema: As estruturas em topos são adequadas para a lógica intuicionista de primeira ordem. Isto é: se $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é um conjunto finito de sentenças (i.e., fórmulas em variaveis livres) então $\Gamma \models \varphi$ sse φ é uma consequência lógica de Γ com relação à lógica intuicionista de primeira ordem.

Podemos enriquecer a linguagem considerando tipos funcionais ($s_1 \to s_2$), interpretados pela exponencial $M(s_2)^{M(s_1)}$. Na linguagem de ordem superior obtida podemos axiomatizar teoria de tipos (ou lambda-cálculo com tipos, ou lógica de ordem superior), de maneira que a semântica de topos é correta e completa. A semântica de topos é mais elegante e geral que a semântica fornecida por Henkin em seu famoso artigo "Completeness in the theory of types", Journal of Symbolic Logic 15:81-91, 1950.

Alternativamente, a semantica de topos é adequada para um certo cálculo de sequentes chamado de *Local Set Theory*. Desta maneira, podemos expressar e analisar todas as construções de topos através de um método de prova sintáctico, numa linguagem similar à de teoria de conjuntos. Por exemplo, os monomorfismos são os modelos da seguinte fórmula (aqui, f é uma variável do tipo funcional $(s_1 \to s_2)$):

$$\forall x \forall y((f(x) =_{s_2} f(y)) \to (x =_{s_1} y)).$$

É possivel ainda dar sistemas axiomáticos à la Hilbert para a lógica intuicionista de ordem superior (no lugar do cálculo de sequentes da *Local Set Theory*, mas na mesma linguagem), corretos e completos para a semântica de topos. Veja

M.E. Coniglio e C. Sernadas, "A Complete Axiomatization of Higher-Order Intuitionistic Logic". CLE e-Prints Vol. 2(6), 2002. http://www.cle.unicamp.br/e-prints/

Bibliografia

(1) **Teoria de Categorias:**
R. Goldbaltt. *Topoi: The categorial Analysis of Logic*. North-Holland, 1984 (second edition).
Nível introdutório. Recomendável como primeiro texto sobre o tema.

S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1998 (second edition).
Texto clássico. Apropriado para matemáticos, funciona como manual de referência.

(2) **Lógica e Teoria de Categorias:**
M. Makkai e G. Reyes. *First-Order Categorical Logic*. Lecture Notes in Mathematics 611, Springer-Verlag, 1971.
Texto clássico sobre semântica categorial.
Nível médio.

J. Lambek e P.J. Scott. *Introduction to Higher-order Categorical Logic*. Cambridge University Press, 1986.
Outro texto clássico sobre semântica categorial.
Nível avançado.

S. Mac Lane e I. Moerdjik. *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer, 1992.
Texto para leitores com alguma experiência em teoria de categorias. Excelente referência, com abundantes exemplos matemáticos.
Nível médio/avançado.

J.L. Bell. *Toposes and Local Set Theories*. Oxford University Press, 1998.
Excelente descrição da Local Set Theory. Autocontido. Nível médio.

B. Jacobs. *Categorical Logic and Type Theory*. Elsevier, 1999.
Texto avançado, está a caminho de ser um clássico. Recomendável para quem quer estudar seriamente o assunto.

P.T. Johnstone. *Stone Spaces*. Cambridge University Press, 1982.
Excelente texto orientado a matemáticos, em especial algebristas. Com ênfase na teoria de reticulados.